Gleichungen lösen

Vorarbeiten

Bevor man die **Standard-Lösungsmethoden** anwenden kann, muss man die gegebene Gleichung häufig vereinfachen und umformen. Falls man den Gleichungen nicht direkt ihre Lösungen „ansieht“, wie z.B. bei $(x+1)^2 = 9$ die Lösungen $x_1=2$ und $x_2=-4$, gelten beim Umformen normalerweise folgende Regeln:

- Alles mittels Äquivalenzumformungen auf die linke Seite bringen. Rechts steht dann = 0 .
- Falls die linke Seite aus mehreren **Summanden** besteht:
    - alles ausmultiplizieren
    - gleichartige Summanden zusammenfassen
    - die Summanden ordnen (höchste Potenz zuerst)
    - gemeinsame Faktoren ausklammern
- Falls die linke Seite aus mehreren **Faktoren** besteht: NICHT ausmultiplizieren! (Satz vom Nullprodukt)

Besonderheiten bei **Bruch- und Wurzelgleichungen**:

- Die Wurzel auf die eine Seite und alles Andere auf die andere Seite bringen, dann quadrieren.
- Bei Bruchgleichungen den Hauptnenner bilden und mit diesem beide Seiten der Gleichung multiplizieren.

Danach werden die obigen Regeln angewandt. Die folgenden Beispiele zeigen nur diese notwendigen Vorbereitungen. Die Standard-Lösetechniken werden danach erklärt.

Beispiel 1:

$$2x^3+3x^2+8=x^3-4x^2-10x+8 \qquad \left|-x^3+4x^2+10x-8\right.$$
$$x^3+7x^2+10x=0$$
$$x\left(x^2+7x+10\right)=0$$

Beispiel 2:

$$\left(e^x-1\right)\left(\sin\left(x\right)+1\right)=0$$

NICHT ausmultiplizieren!

Beispiel 3:

$$x-\sqrt{6x+19}=-2 \qquad \left|+2+\sqrt{6x+19}\right.$$
$$x+2=\sqrt{6x+19} \qquad \left|\left(\ldots\right)^2\right.$$
$$x^2+4x+4=6x+19 \qquad \left|-6x-19\right.$$
$$x^2-2x-15=0$$

Beispiel 4:

$$e^x-3=\frac{-4}{e^x+1} \qquad \left|\cdot\left(e^x+1\right);\quad e^x+1>0\right.$$
$$\left(e^x-3\right)\left(e^x+1\right)=-4$$
$$e^{2x}-3e^x+e^x-3=-4 \qquad \left|+4\right.$$
$$e^{2x}-2e^x+1=0$$

Lösen quadratischer Gleichungen mit der „Mitternachtsformel“

Falls man eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ vorliegen hat, löst man diese mit der Mitternachtsformel.

Dazu prüft man zunächst die **Diskriminante** $d=b^2-4ac$. Es gibt folgende Möglichkeiten:

Fall 1: $d>0$: Die Gleichung hat zwei Lösungen.
Fall 2: $d=0$: Die Gleichung hat eine Lösung.
Fall 3: $d<0$: Die Gleichung hat keine Lösung.

Im Fall 1 wendet man die Mitternachtsformel an: $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

Im Fall 2 vereinfacht sich die Mitternachtsformel zu : $x=-\dfrac{b}{2a}$

Im Fall 3 ist man schon fertig, man schreibt: $d<0\Rightarrow$ keine Lösung

Als Beispiel hier der Abschluss der Lösung von

Beispiel 3: $x^2-2x-15=0$ gedacht: $1\cdot x^2+(-2)\cdot x+(-15)=0$

$d=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=64>0$ $a=1, b=-2, c=-15$

$$x_{1/2}=\frac{+2\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}$$

$x_1=5,\quad x_2=-3$

Da im Laufe der Lösung quadriert wurde, was keine Äquivalenzumformung ist, müssen die Lösungen in der Ausgangsgleichung $x-\sqrt{6x+19}=-2$ zur Probe eingesetzt werden:

Probe: 1) $5-\sqrt{6\cdot5+19}=5-\sqrt{49}=5-7=-2$ Stimmt. $x_1=5$ ist Lösung.

2) $-3-\sqrt{6\cdot(-3)+19}=-3-1=-4\neq-2$ $x_2=-3$ ist keine Lösung.

Der „Satz vom Nullprodukt“

Liegt eine Gleichung der Form $(Faktor\ 1)\cdot(Faktor\ 2)\cdot(Faktor\ 3)\cdot\ldots=0$ vor, so findet man alle Lösungen, indem man nacheinander jeden Faktor gleich null setzt und die entstehenden Gleichungen einzeln löst. Als Beispiele hier die Lösungen von Beispiel 1 und 2:

Beispiel 1: $x\left(x^2+7x+10\right)=0$

SvNP: 1) $x_1=0$

2) $x^2+7x+10=0$

$d=7^2-4\cdot10=9>0$

$$x_{2/3}=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}$$

$x_2=-2,\quad x_3=-5$

Beispiel 2: $\left(e^x-1\right)\left(\sin(x)+1\right)=0$ (hier gelöst für $x\in[0;2\pi]$)

SvNP: 1) $e^x-1=0$ 2) $\sin(x)+1=0$

$e^x=1$ $\sin(x)=-1$

$x_1=0$ $x_2=\frac{3\pi}{2}$

Häufiger Fehler:
Den Satz vom Nullprodukt kann man nur anwenden, wenn die rechte Seite der Gleichung **null** ist. Bei anderen Zahlenwerten nicht!

Substitution

Häufig lassen sich Gleichungen durch eine geschickte **Substitution** auf eine quadratische Gleichung reduzieren, die man mit der Mitternachtsformel löst. Einige typische Beispiele:

$2x^4+8x^2+8=0$ wird durch die Substitution $x^2=u$ zu $2u^2+8u+8=0$.

$x^6+x^3-6=0$ wird durch die Substitution $x^3=u$ zu $u^2+u-6=0$.

$2e^{2x}+13e^x-45=0$ wird durch die Substitution $e^x=u$ zu $2u^2+13u-45=0$.

$\left(\sin(x)\right)^2+1{,}5\cdot\sin(x)+0{,}5=0$ wird durch $\sin(x)=u$ zu $u^2+1{,}5u+0{,}5=0$.

Anschließend muss man die für u gefundenen Lösungen **rücksubstituieren**, d.h. mit dem Term, der durch u symbolisiert wurde, gleichsetzen und dann die entstehende(n) Gleichung(en) für x lösen. Als Beispiel hier die Lösung von

Beispiel 4: $e^{2x}-2e^x+1=0$ gedacht: $e^{2x}=\left(e^x\right)^2$

Subst.: $e^x=u$

$u^2-2u+1=0$

$d=(-2)^2+4\cdot1\cdot1=0$ Es gibt genau eine Lösung.

$u=\frac{+2}{2\cdot1}=1$

Rücksubst.: $e^x=1$

$x=0$