Äquivalenzumformungen

Was ist eine Äquivalenzumformung?

Beim Lösen von Gleichungen wendet man **auf beiden Seiten** der Gleichung **dieselbe** Rechenoperation an. Erlaubt sind dabei solche Operationen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern, diese nennt man Äquivalenzumformungen:

Beispiel 1:

$7x+3=5x-4 \quad |-3$ **Addieren / Subtrahieren einer Zahl**

$7x=5x-7 \quad |-5x$ **Addieren / Subtrahieren eines Terms**

$2x=-7 \quad |:2$ **Multiplizieren mit / Dividieren durch eine/r Zahl ($\neq 0$)**

$x=-3{,}5$

Beim Anwenden der Rechenoperationen ist darauf zu achten, dass diese jeweils auf die **ganze** linke bzw. rechte Seite der Gleichung wirken. Bei komplizierteren Termen setzt man immer zuerst **eine Klammer** um jede Seite der Gleichung und löst diese dann auf.

Beispiel 2: $x^2+\frac{2}{3}x=5 \quad |\cdot 3$ falsch: $x^2+2x=15$ ✗

richtig: $\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)\cdot 3=15 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+2x=15$ ✓

Multiplizieren mit einem Term

Es ist erlaubt, mit einem Term zu multiplizieren bzw. durch einen Term zu dividieren, wenn sichergestellt ist, dass dieser **nicht gleich null** ist.

Beispiel 3: $\frac{x}{x-2}+3=4x \quad |\cdot(x-2)$ **für $x\neq 2$** $\Rightarrow \left(\frac{x}{x-2}+3\right)\cdot(x-2)=4x\cdot(x-2)$

$\Rightarrow x+3\cdot(x-2)=4x\cdot(x-2)$

$\Rightarrow \ldots$

Beispiel 4: $2^x+\frac{9}{2^x}=6 \quad |\cdot 2^x$ **ist erlaubt, da $2^x>0$** $\Rightarrow (2^x)^2+9=6\cdot 2^x$

$\Rightarrow \ldots$

Beispiel 5: $x^3+2x^2=0$

falsch: dividieren durch x^2 , denn es ist möglich, dass $x^2=0$ ist.

richtig: $x^2\cdot(x+2)=0$ **;** Satz vom Nullprodukt: $x_1=0;\ x_2=-2$

Anwenden von Funktionen auf beiden Seiten

Bilden des Kehrwerts

Wenn beide Seiten der Gleichung **nicht null** werden können, darf auf beiden Seiten der Kehrwert gebildet werden.

Beispiel 6: $\frac{1}{x+3} = 4 \quad \left| (\ldots)^{-1} \right. \quad \Rightarrow \quad x+3 = \frac{1}{4} \quad \left| -3 \right. \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{11}{4}$

Beispiel 7: $\frac{x-2}{x^3+x} = 4$ Das Bilden des Kehrwerts ist nicht erlaubt, da $x-2$ null werden kann.

Quadrieren / Potenzieren mit geraden Hochzahlen

Beim Quadrieren / Potenzieren mit geraden Hochzahlen bekommt man möglicherweise zusätzliche Lösungen einer Gleichung, die ursprünglich nicht vorhanden waren. Deshalb muss man am Ende **eine Probe** machen.

Beispiel 8:

$$\sqrt{x-3} = -5 \quad \left| (\ldots)^2 \right.$$
$$x-3 = 25 \quad \left| +3 \right.$$
$$x = 28$$

Probe: $\sqrt{28-3} = +5 \neq -5$

$x = 28$ ist keine Lösung der Gleichung.
Die Gleichung hat also <u>keine Lösung</u>.

Potenzieren mit ungeraden Hochzahlen

Beim Potenzieren mit ungeraden Hochzahlen bekommt man keine zusätzlichen Lösungen, dies ist also immer erlaubt und es ist keine Probe nötig.

Wurzelziehen

Beim Ziehen der Quadratwurzel (auch vierte, sechste Wurzel usw.) ist darauf zu achten, dass man niemals die Wurzel aus negativen Zahlen zieht. Man erhält dabei immer zunächst die positive von zwei möglichen Lösungen, die zweite Lösung ist deren Gegenzahl.

Beispiel 9:

$$x^4 = 16 \quad \left| \sqrt[4]{\ldots} \right.$$
$$x_1 = \sqrt[4]{16} = 2$$

Die zweite mögliche Lösung ist $x_2 = -\sqrt[4]{16} = -2$

Beispiel 10:

$$(x+2)^2 = 9 \quad \left| \sqrt{\ldots} \right.$$
$$x_1 + 2 = 3 \quad \text{oder} \quad x_2 + 2 = -3$$
$$x_1 = 1 \quad \text{oder} \quad x_2 = -5$$

Auch beim Wurzelziehen mit ungeradem Wurzelexponenten ist darauf zu achten, dass man niemals die Wurzel aus einer negativen Zahl zieht. Man erhält dabei immer nur eine Lösung. Das Vorzeichen erhält man aus der Betrachtung der Parabeln ungerader Ordnung:

Beispiel 11: $x^3 = -8 \quad \Big|\sqrt[3]{\ldots}$ **falsch:** $x = \sqrt[3]{-8} = -2$ ✗

richtig: $x = -\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8} = -2$ ✓

Das Vorzeichen der Lösung ist negativ, weil die Parabel 3. Ordnung vom dritten Quadranten zum ersten Quadranten verläuft. Beim y-Wert -8 muss der gesuchte x-Wert also negativ sein.

Anwenden von Exponential- oder Logarithmusfunktionen

Das Anwenden von Exponentialfunktionen ist immer erlaubt und es ist keine Probe nötig. Beim Anwenden von Logarithmusfunktionen müssen beide Seiten der Gleichung positiv sein.

Beispiel 12: $\ln\left(x^2+3\right)=2 \quad \left|e^{(\ldots)}\right. \quad \Rightarrow \quad x^2+3=e^2 \quad \Rightarrow \quad \ldots$

Beispiel 13: $e^{2x+3}=1 \quad \left|\ln(\ldots)\right. \quad \Rightarrow \quad 2x+3=0$ ist erlaubt, da $e^{2x+3}>0$ und $1>0$.

$e^{2x+3}=-1$ Das Anwenden der ln-Funktion ist **nicht erlaubt,** da $-1<0$.

Termstrukturen erkennen

Um herauszufinden, **welche** Äquivalenzumformungen **in welcher Reihenfolge** angewandt werden müssen, muss man sich zuerst die Struktur des gegebenen Terms klar machen. Dazu muss man die Hierarchie der Rechenarten kennen:

1. Klammern
2. Potenz / Wurzel
3. Punktrechenarten
4. Strichrechenarten

Man geht stets von der Variable x aus und untersucht, welche Operationen nacheinander auf x wirken.

Beispiel 14: $5\cdot\left(x^2+3\right)=35$

1. Potenz x^2
2. Summe x^2+3
3. Produkt $5\cdot\left(x^2+3\right)$

Die Äquivalenzumformungen erfolgen in **umgekehrter Reihenfolge:**

1. Division durch 5 $\quad x^2+3=7$
2. Subtraktion der Zahl 3 $\quad x^2=4$
3. Wurzelziehen $\quad x_1=2,\ x_2=-2$

Aufgaben

1. Mache dir die Termstruktur klar und lege die Reihenfolge der notwendigen Äquivalenzumformungen fest wie in Beispiel 14:

a) $10\left(\sqrt{x}+4\right)=50$ b) $10\sqrt{2x+4}-3=47$ c) $10\left(\left(x+4\right)^2-3\right)=70$

d) $\frac{1}{2x-3}=\frac{2}{3}$ e) $e^{2x+5}=1$ f) $\ln\left(2x^2+1\right)=1$

2. Löse die Gleichungen wie in den Beispielen 1 und 2. Prüfe immer, ob sich **vor** der Anwendung von Äquivalenzumformungen beide Seiten der Gleichung jeweils getrennt vereinfachen lassen.
Für quadratische Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$ findet man die Lösungen mit der „Mitternachtsformel": $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

a) $2x+7=14-5x$ b) $\frac{1}{2}(3x+1)=-x+2$ c) $(x-2)^2=x^2-2x$

d) $-4x^2+6x-3=0$ e) $34+12x=-x^2$ f) $x^2-\frac{1}{6}x=2$

3. Löse wie in den Beispielen 3 und 6:

a) $\frac{x}{1-x}=5$ für $x\neq 1$ b) $\frac{5}{x-2}=0{,}1$ für $x\neq 2$ c) $\frac{3}{x}=4x-1$ für $x\neq 0$

4. Löse wie in Beispiel 8 und mache die Probe. Achte darauf, dass vor dem Quadrieren die Wurzel allein auf einer Seite der Gleichung stehen muss:

a) $\sqrt{4x+1}=-7$ b) $2\sqrt{x}+x=2$ c) $\sqrt{2x+7}-x=1$.

5. Löse wie in Beispiel 9, 10 und 11:

a) $x^6=64$ b) $x^3=27$ c) $(2x-3)^2=25$

d) $(x+3)^5=-32$ e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

6. Löse wie in Beispiel 12 und 13:

a) $\log_{10}(2x)=4$ b) $\ln(0{,}5x+1)=1$ c) $2^{1-x}=16$

d) $e^{x^2-1}=1$ e) $3e^{4x}=12$ f) $4^{\frac{1}{3}x-1}=-16$

Lösungen

1. a) Division durch 10, Subtraktion von 4, Quadrieren (& Probe!)
   b) Addition von 3, Division durch 10, Quadrieren, Subtraktion von 4, Division durch 2 (& Probe!)
   c) Division durch 10, Addition von 3, Wurzelziehen (2 mögl. Lös.!), Subtraktion von 4
   d) Kehrwert, Addition von 3, Division durch 2
   e) Logarithmieren ($\ln(\ldots)$), Subtraktion von 5, Division durch 2
   f) Exponieren ($e^{(\ldots)}$), Subtraktion von 1, Division durch 2, Wurzelziehen (2 mögl. Lös.!)
2. a) $x=1$ b) $x=\frac{3}{5}$ c) $x=2$ d) keine L. e) $x_{1,2}=-6\pm\sqrt{2}$ f) $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{4}{3}$
3. a) $x=\frac{5}{6}$ b) $x=52$ c) $x_1=1, x_2=-\frac{3}{4}$
4. a) keine L. b) $x_{1,2}=4\pm 2\sqrt{3}$ c) $x=\sqrt{6}$, Probe nur m. TR machbar, für $x=-\sqrt{6}$ falsch
5. a) $x_{1,2}=\pm 2$ b) $x=+3$ c) $x_1=4, x_2=-1$
   d) $x=-5$ e) $x_1=0, x_2=-1$
6. a) $x=5000$ b) $x=2e-2$ c) $x=-3$ d) $x_{1,2}=\pm 1$ e) $x=0{,}25\ln(4)$ f) k.L.