Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Tim, Chris, Niko und Alex tragen T-Shirts in verschiedenen Farben: Schwarz, weiß, grün und blau. Vanessa hat die drei gesehen und erzählt ihren Freundinnen:

(1) Tims Shirt ist nicht schwarz und auch nicht weiß.
(2) Das Shirt von Alex ist blau.
(3) Tim trägt nicht blau und Niko nicht weiß.

Die Freundinnen raten sofort los: Alex trägt blau, Tim grün, Niko schwarz und Chris weiß. Aber Vanessa ergänzt, dass alle drei Aussagen (1), (2) und (3) falsch sind.

b$_1$) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3).
b$_2$) Beweisen Sie, dass eindeutig bestimmt ist, welcher der vier Jungs welche Farbe trägt, wenn die drei Aussagen falsch sind. Geben Sie an, wer welche Farbe trägt.

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

In der letzten Spalte steht nur der Wahrheitswert w, also ist die Aussage bewiesen.

Alternative Lösung:
Letzte Spalte weglassen. Dann gehört ebenfalls ein erläuternder Text dazu, wie z.B.:
Da die vierte Spalte $(\neg(A \wedge B))$ und die letzte Spalte $(\neg A \vee \neg B)$ in den Wahrheitswerten übereinstimmen, ist der Beweis erbracht. (Dieser Text gibt dann 1 Punkt.)

b) **b$_1$)** $\neg$ (1) Tims Shirt ist schwarz oder weiß.
$\neg$ (2) Das Shirt von Alex ist nicht blau.
$\neg$ (3) Tim trägt blau oder Niko weiß.

b$_2$) Nach $\neg$ (1) ist Tims Shirt schwarz oder weiß, also nicht blau.
Damit $\neg$ (3) wahr ist, muss dann Niko weiß tragen.
Da Tims Shirt eine andere Farbe hat, folgt aus $\neg$ (1), dass Tim schwarz trägt.
Für Alex bleiben nun die Farben grün und blau übrig. Aus $\neg$ (2) folgt, dass Alex grün trägt.
Für Chris bleibt nun die Farbe blau übrig.
Die Farben der vier Shirts sind somit eindeutig bestimmt: Tim trägt schwarz, Chris blau, Niko weiß und Alex grün.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad f(x \cdot y) \;=\; f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f(2^n) \;=\; n \cdot f(2)$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $f(1) = 0$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Hinweise: Setzen Sie geeignete Werte für x, y in $(*)$ ein.
Im Aufgabenteil c) darf das Ergebnis aus b) verwendet werden, auch wenn Teil b) nicht gelöst wurde.

Lösung:

a) Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $f(2^1) = f(2) = 1 \cdot f(2)$. Also ist der Induktionsanfang $f(2^1) = 1 \cdot f(2)$ bewiesen.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $f(2^n) = n \cdot f(2)$ für eine beliebige aber feste Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt mit $x = 2$ und $y = 2^n$ aus $(*)$

$$f(2^{n+1}) = f(2 \cdot 2^n) = f(2) + f(2^n) \underset{\text{voraussetzung}}{\overset{\text{Induktions-}}{=}} f(2) + n \cdot f(2) = (n+1) \cdot f(2)$$

Dies beweist die Induktionsbehauptung $f(2^{n+1}) = (n+1) \cdot f(2)$.

Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(2^n) = n \cdot f(2)$.

b) Mit $x = y = 1$ folgt aus $(*)$

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$$

und durch Subtraktion von $f(1)$ auf beiden Seiten ergibt sich $0 = f(1)$.

c) Sei $x > 0$. Mit $y = \frac{1}{x}$ folgt aus $(*)$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) \overset{\text{b)}}{=} 0.$$

Subtraktion von $f(x)$ liefert $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen f und h mit $f(x) = (x+4)^2$ und $h(x) = \dfrac{1}{5}(x^2 - 4)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und h und die Schnittpunkte der Graphen von f und h.

b) Skizzieren Sie die Graphen $y = f(x)$ und $y = h(x)$, ihre Schnittpunkte und die Nullstellen von f und h in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{1}{5}(x^2 - 4) \;\leq\; (x+4)^2.$$

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\sqrt{\frac{1}{5}(x^2 - 4)} \;\leq\; x + 4.$$

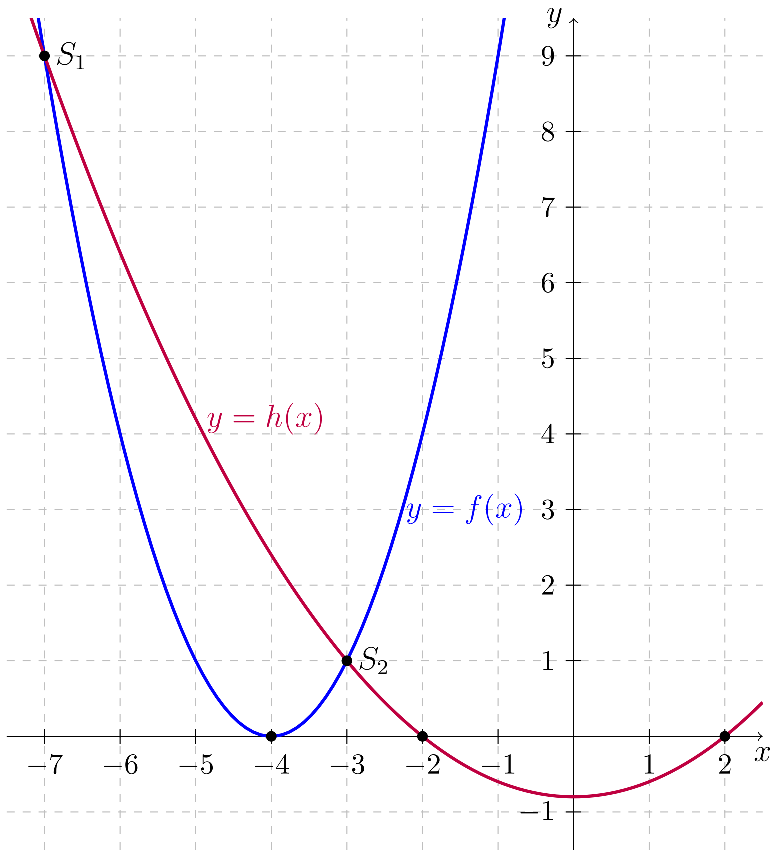
Lösung:

a) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -4$: Einzige Nullstelle von f ist $x = -4$.
$h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$: h hat zwei Nullstellen $x = 2$, $x = -2$
Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = \tfrac{1}{5}(x^2-4) \\ &\Leftrightarrow \quad 5(x^2+8x+16) = x^2-4 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x^2+40x+80 = x^2-4 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^2+40x+84 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+10x+21 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \tfrac{-10\pm\sqrt{100-84}}{2} = \tfrac{-10\pm 4}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} f(-7) = (-3)^2 = 9 \\ f(-3) = 1^2 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Die Graphen schneiden sich in den} \\ \text{Punkten } S_1(-7 \mid 9) \text{ und } S_2(-3 \mid 1). \end{array} \right.$$

b)



c) Aus der Graphik folgt: $L = (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$ bzw. $L = \{x : x \leq -7 \;\vee\; x \geq -3\}$

d) Beim Wurzelziehen muss man auf beiden Seiten aufpassen. Die linke Seite ist nur für $x \leq -2$ oder $x \geq 2$ definiert. Und die rechte Seite wird negativ für $x \leq -4$. Damit wird die Lösungsmenge zu $L = [-3, -2] \cup [2, \infty)$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben seien reelle Folgen (a_n), (b_n) und reelle Zahlen a, b.

a) Geben Sie die Definition dafür an, dass (a_n) gegen a konvergiert.

b) Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$.

- **b₁)** Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$, wenn (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert?
- **b₂)** Beweisen Sie den Satz.
- **b₃)** Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n \;=\; \frac{n^2 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}.$$

Lösung:

a) (a_n) heißt konvergent gegen a, wenn es zu jedem (oder für alle) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\big|a_n - a\big| \;<\; \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon$$

gilt.

b) **b₁)** $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.

b₂) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest gewählt.
$a_n \to a \;\Rightarrow\;$ es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_1$
$b_n \to b \;\Rightarrow\;$ es gibt ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_2$
Für $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ folgt

$$\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| \;=\; \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \;\le\; |a_n - a| + |b_n - b| \;<\; \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

Somit ist ein $N \in \mathbb{N}$ gefunden, so dass $\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| < \varepsilon$ für $n > N$ gilt.

b₃) Die Umkehrung des Satzes lautet:
Wenn die Summenfolge $(a_n + b_n)$ konvergiert,
dann konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n).
Diese Aussage ist falsch, denn falls $a_n = n$ und $b_n = -n$ gesetzt wird, so folgt $a_n + b_n = 0$, d.h. $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen 0, obwohl (a_n) und (b_n) divergent sind.
Man kann auch z.B. $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -(-1)^n$ setzen.

c) Es gilt

$$a_n \;=\; \frac{n^2 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n} \;=\; \frac{4^n\left(\frac{n^2}{2^n} + 1 + \frac{(-1)^n}{4^n}\right)}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)} \;=\; \frac{\frac{n^2}{2^n} + 1 + \frac{(-1)^n}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}$$

und

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 \;\to\; -1 \;\neq\; 0$$

$$\frac{n^2}{2^n} + 1 + \frac{(-1)^n}{4^n} \;\to\; 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{-1} = -1.$$

Statistik zur Zertifikatsklausur 2020

Anzahl Teilnehmer: 629

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 15,7 Punkte

Median: 16 Punkte

$\frac{1}{4}$ aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben über 19,5 Punkte erreicht

$\frac{3}{4}$ aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben über 12,5 Punkte erreicht