Universität Stuttgart

MINT-KOLLEG BADEN-WÜRTTEMBERG

Zertifikatsklausur **23.10.2020**

Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\neg(A \wedge B) \ \Leftrightarrow\ (\neg A \vee \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Tim, Chris, Niko und Alex tragen T-Shirts in verschiedenen Farben: Schwarz, weiß, grün und blau. Vanessa hat die drei gesehen und erzählt ihren Freundinnen:

(1) Tims Shirt ist nicht schwarz und auch nicht weiß.
(2) Das Shirt von Alex ist blau.
(3) Tim trägt nicht blau und Niko nicht weiß.

Die Freundinnen raten sofort los: Alex trägt blau, Tim grün, Niko schwarz und Chris weiß. Aber Vanessa ergänzt, dass alle drei Aussagen (1), (2) und (3) falsch sind.

b$_1$) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3).

b$_2$) Beweisen Sie, dass eindeutig bestimmt ist, welcher der vier Jungs welche Farbe trägt, wenn die drei Aussagen falsch sind. Geben Sie an, wer welche Farbe trägt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad f(x \cdot y) \ =\ f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f(2^n) \ =\ n \cdot f(2)$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $f(1) = 0$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Hinweise: Setzen Sie geeignete Werte für x, y in $(*)$ ein.
Im Aufgabenteil c) darf das Ergebnis aus b) verwendet werden, auch wenn Teil b) nicht gelöst wurde.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen f und h mit $f(x) = (x+4)^2$ und $h(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 4)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und h und die Schnittpunkte der Graphen von f und h.
b) Skizzieren Sie die Graphen $y = f(x)$ und $y = h(x)$, ihre Schnittpunkte und die Nullstellen von f und h in einem geeigneten Koordinatensystem.
c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{1}{5}(x^2 - 4) \;\leq\; (x+4)^2.$$

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\sqrt{\frac{1}{5}(x^2 - 4)} \;\leq\; x + 4.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben seien reelle Folgen (a_n), (b_n) und reelle Zahlen a, b.

a) Geben Sie die Definition dafür an, dass (a_n) gegen a konvergiert.
b) Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$.
  b₁) Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$, wenn (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert?
  b₂) Beweisen Sie den Satz.
  b₃) Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.
c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n \;=\; \frac{n^2 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}.$$