Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Ein Geheimdienst beobachtet vier Spione A, B, C, D und möchte ihre Namen herausbekommen. Nachdem ein Treffen der vier Spione beobachtet wurde, steht fest, dass ihre Namen Alexander, Francois, James und Pjotr sind, und dass keine zwei den selben Namen besitzen. Außerdem konnte ermittelt werden, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

b_1) A heißt James oder Alexander,
b_2) Wenn A James heißt, dann heißt C Francois,
b_3) Wenn B nicht Alexander heißt, dann heißt C Pjotr,
b_4) C heißt nicht Francois,
b_5) B heißt Pjotr oder B heißt nicht Francois.

Zeigen Sie, dass die Namen der Spione A, B, C, D durch die Angaben eindeutig bestimmt sind, und geben Sie an, wie jede der Personen heißt.

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

In der letzten Spalte steht nur der Wahrheitswert w, also ist die Aussage bewiesen.

Alternative Lösung:
Letzte Spalte weglassen. Dann gehört ebenfalls ein erläuternder Text dazu, wie z.B.:
Da die dritte Spalte $(A \Leftrightarrow B)$ und die letzte Spalte $(\neg A \vee B)$ in den Wahrheitswerten übereinstimmen, ist der Beweis erbracht. (Dieser Text gibt dann 1 Punkt.)

b) Aus b_4) und b_2) folgt, dass A nicht James heißt.
Damit folgt aus b_1), dass A Alexander heißt.
Damit heißt B nicht Alexander, und aus b_3) folgt, dass C Pjotr heißt.
Für B bleiben die Namen Francois und James übrig. Da B nicht Pjotr heißt, Kann B nach b_5) auch nicht Francois heißen. B heißt also James.
Da die Namen Alexander, James und Pjotr bereits zugeordent sind, muss D Francois heißen. Insbesondere sind die Namen eindeutig.

Antwort: A heißt Alexander, B James, C Pjotr und D Francois.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Gegeben sind eine reelle Folge (a_n) und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$.

a_1) Geben Sie die Definition der Konvergenz „$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$" an.

a_2) Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge (a_n) konvergent, so ist sie beschränkt.

a_3) Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a_2) und zeigen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (b_n) mit $b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) **a_1)** Zu jedem (oder für alle) $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N_\varepsilon$

$$\left|a_n - a\right| \;<\; \varepsilon$$

gilt.

a_2) Zu zeigen ist: Es gibt eine Zahl $M > 0$, so dass $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
Wähle $\varepsilon := 1$. Da (a_n) konvergent ist, gibt es ein N_1, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N_1$ gilt.
Für $n > N_1$ folgt dann

$$|a_n| \;=\; |a_n - a + a| \;\le |a_n - a| + |a| \;<\; 1 + |a|.$$

Für $n = 1, \ldots N_1$ gilt $|a_n| \le \max\left\{|a_1|, \ldots, |a_{N_1}|\right\}$. Setze nun

$$M \;:=\; \max\left\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|\right\}.$$

Dann folgt $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a_3) Die Umkehrung des Satzes lautet: Ist (a_n) beschränkt, so ist (a_n) konvergent.

Diese Umkehrung ist falsch, da z.B. die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ beschränkt und nicht konvergent ist.

b)

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}\right)\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{n^2+2n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\ &\to \frac{3}{2} \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = 1 - x^{2^n}$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$p_n(x) \;=\; (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ gilt.

b) Folgern Sie aus a), dass p_n außer $x = \pm 1$ keine weiteren reellen Nullstellen besitzt ($n \in \mathbb{N}$).

Lösung:

a) Induktionsanfang $n = 2$: Es gilt

$$(1-x)(1+x)(1+x^2) \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{3. binom.}}{=}} (1-x^2)(1+x^2) \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{3. binom.}}{=}} 1-x^4 = p_2(x).$$

Damit ist die Aussage für $n = 2$ wahr.

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung:
Es gelte $p_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$ für eine beliebige aber feste Zahl n.

Dann folgt

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= 1-x^{2^{n+1}} = 1-\left(x^{2^n}\right)^2 \\ &\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{3. binom.}}{=}} (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) \\ &\underset{\text{vorauss.}}{\overset{\text{Induktions-}}{=}} (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}). \end{aligned}$$

Dies beweist die Induktionsbehauptung $p_{n+1}(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$.

b) Für $n \geq 2$ gilt

$$p_n(x) = (1-x)(1+x)\underbrace{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}.$$

Das Produkt aus den ersten beiden Klammern besitzt die Nullstellen $x = \pm 1$.
Das unterklammerte Produkt ist größer oder gleich 1 und besitzt daher keine Nullstellen.
Aus dem Satz vom Nullprodukt folgt, dass p_n genau die zwei Nullstellen $x = \pm 1$ und keine weiteren Nullstellen besitzt.

Für $n = 1$ gilt $p_1(x) = 1-x^2 = (1-x)(1+x)$. Damit besitzt p_1 nach dem Satz vom Nullprodukt genau die zwei Nullstellen $x = \pm 1$ und keine weiteren Nullstellen.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \leq 0$.

b) Bestimmen Sie reelle Zahlen A, B, so dass

$$\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ erfüllt ist.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

unter Berücksichtigung der Nullstellen, des Monotonieverhaltens und der Asymptoten.

Lösung:

a) Der Zähler ändert das Vorzeichen bei $x_1 = \frac{5}{4}$, der Nenner bei $x_2 = -1$ und bei $x_3 = 2$.
Da $\ldots = 0$ zugelassen ist, enthält die Lösung $x = \frac{5}{4}$.
Eine Punktprobe liefert

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{-5}{-2} > 0.$$

Wegen $-1 < 0 < \frac{5}{4}$ folgt, dass das Intervall $(-1, \frac{5}{4})$ nicht zur Lösungsmenge gehört.
Da das Vorzeichen des Bruches genau bei x_1, x_2, x_3 wechselt, folgt $L = (-\infty, -1) \cup [\frac{5}{4}, 2)$.

Alternative Lösung: Der Zähler ändert das Vorzeichen bei $x_1 = \frac{5}{4}$, der Nenner bei $x_2 = -1$ und bei $x_3 = 2$.
Wegen $-1 < \frac{5}{4} < 2$ sind die folgenden Fallunterscheidungen ausreichend:

Fall $x < -1$: Zähler negativ, Nenner positiv $\Rightarrow$ alle $x < -1$ sind in der Lösungsmenge enthalten,

Fall $-1 < x < \frac{5}{4}$: Zähler negativ, Nenner negativ $\Rightarrow$ kein Beitrag zur Lösungsmenge,

Fall $\frac{5}{4} \le x < 2$: Zähler ≥ 0, Nenner negativ $\Rightarrow$ alle $x \in [\frac{5}{4}, 2)$ sind in der Lösungsmenge enthalten,

Fall $x > 2$: Zähler positiv, Nenner positiv $\Rightarrow$ kein Beitrag zur Lösungsmenge.

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = (-\infty, -1) \cup [\frac{5}{4}, 2)$.

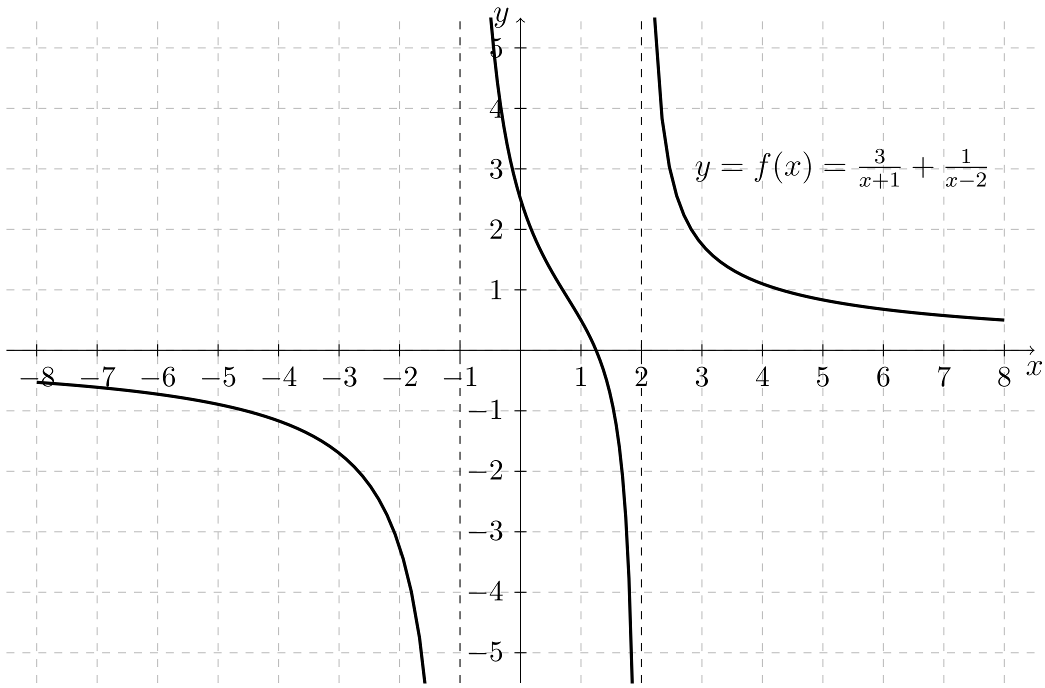
b)

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x-(2A-B)}{(x+1)(x-2)}. \\ \Rightarrow\ 4x-5 &= (A+B)x-(2A+B) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $4 = A + B$ und $5 = 2A - B$.

Zweite Gleichung plus erste $\Rightarrow$ $A = 3 \Rightarrow$ $B = 4 - A = 1$.

c)



Statistik zur Zertifikatsklausur 2019

Anzahl Teilnehmer: 908

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 12,9 Punkte

Median: 12,5 Punkte

$\frac{1}{4}$ aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben über 16,5 Punkte erreicht

$\frac{3}{4}$ aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben über 9 Punkte erreicht