Zertifikatsklausur **27.9.2019**

Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Ein Geheimdienst beobachtet vier Spione A, B, C, D und möchte ihre Namen herausbekommen. Nachdem ein Treffen der vier Spione beobachtet wurde, steht fest, dass ihre Namen Alexander, Francois, James und Pjotr sind, und dass keine zwei den selben Namen besitzen. Außerdem konnte ermittelt werden, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

b$_1$) A heißt James oder Alexander,
b$_2$) Wenn A James heißt, dann heißt C Francois,
b$_3$) Wenn B nicht Alexander heißt, dann heißt C Pjotr,
b$_4$) C heißt nicht Francois,
b$_5$) B heißt Pjotr oder B heißt nicht Francois.

Zeigen Sie, dass die Namen der Spione A, B, C, D durch die Angaben eindeutig bestimmt sind, und geben Sie an, wie jede der Personen heißt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Gegeben sind eine reelle Folge (a_n) und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$.

a$_1$) Geben Sie die Definition der Konvergenz „$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$“ an.

a$_2$) Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge (a_n) konvergent, so ist sie beschränkt.

a$_3$) Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a$_2$) und zeigen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (b_n) mit $b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = 1 - x^{2^n}$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$p_n(x) \;=\; (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\big(1+x^{2^{n-1}}\big).$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

b) Folgern Sie aus a), dass p_n außer $x = \pm 1$ keine weiteren reellen Nullstellen besitzt ($n \in \mathbb{N}$).

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \leq 0$.

b) Bestimmen Sie reelle Zahlen A, B, so dass

$$\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ erfüllt ist.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

unter Berücksichtigung der Nullstellen, des Monotonieverhaltens und der Asymptoten.