Vertiefungskurs Mathematik

Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 27.09.2019

AUFGABE 1

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

A	B	$\overbrace{A \Rightarrow B}^{\alpha}$	$\neg A$	$\overbrace{\neg A \vee B}^{\beta}$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w
w	w	w	f	w	w

Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) Aus b_2) und b_4) folgt, dass A nicht James heißen kann.
Mit b_1) folgt dann sofort, dass **A Alexander** heißen muss.

Daher heißt B nicht Alexander und mit b_3) folgt, dass **C Pjotr** heißt.

Demnach heißt B auch nicht Pjotr. Daher folgt mit b_5), dass B auch nicht Francois heißt. Also bleibt für **B** nur noch der Name **James** übrig.

Somit bleibt für **D** nur noch der Name **Francois** übrig.

Ergebnis:

A	B	C	D
Alexander	James	Pjotr	Francois

AUFGABE 2

a_1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_ε , so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

a_2) Voraussetzung: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_ε , so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt:
$|a_n - a| < \varepsilon$

Behauptung: Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt $s \leq a_n \leq S$
(s ist eine untere Schranke; S ist eine obere Schranke)

Beweis: Da die Folge (a_n) konvergent ist, gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq N_\varepsilon$:
$|a_n - a| < \varepsilon$

Somit folgt z.B. für $\varepsilon = 1$ sofort $|a_n - a| < 1$

Das heißt, alle a_n mit $n \geq N_\varepsilon$ liegen im Intervall $(a - 1; a + 1)$.

Somit liegen unendliche viele Folgeglieder im „ε - Schlauch“ um a.

Sei $S := max\{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{N_\varepsilon - 1}; a + 1\}$ und

sei $s := min\{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{N_\varepsilon - 1}; a - 1\}$

Hinweis: Auf einer endlichen Zahlenmenge wird das Minimum und das Maximum stets angenommen.

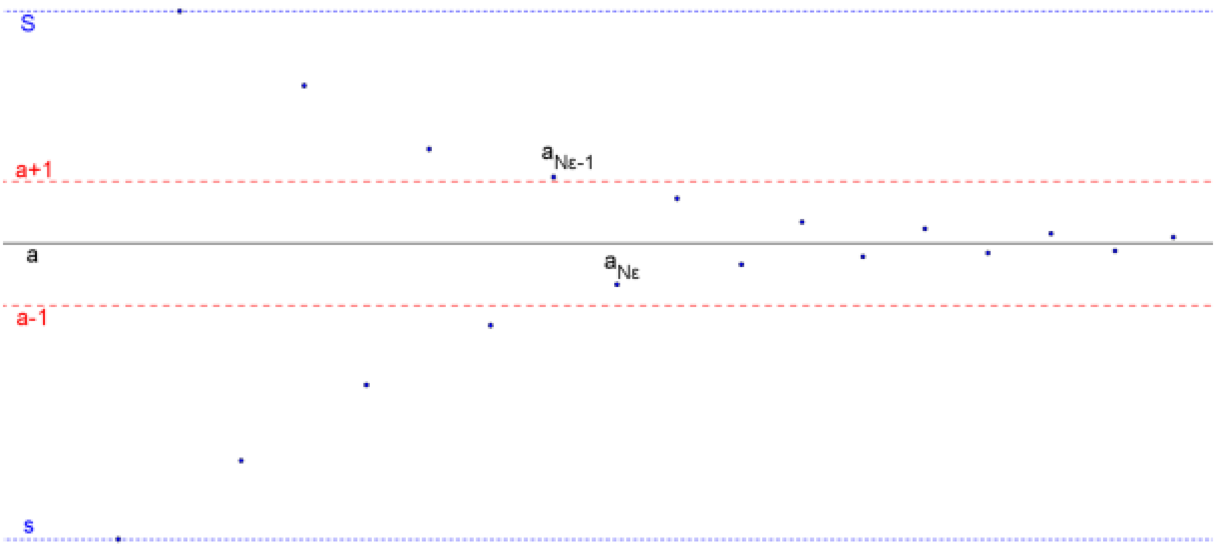
Somit gilt für alle a_n mit $n \leq N_\varepsilon - 1 : s \leq a_n \leq S$

Da $a + 1 \leq S$ und $a - 1 \geq s$ gilt, folgt auch für alle a_n mit $n \geq N_\varepsilon : s \leq a_n \leq S$

Somit gilt für alle a_n: $s \leq a_n \leq S$

Hinweis: Dies ist eine Definition der Beschränktheit von (a_n).

Die Abbildung veranschaulicht die Situation an einem Beispiel:



a₃) Der Kehrsatz lautet:

Ist eine Folge (a_n) beschränkt, dann ist sie auch konvergent.

Der Kehrsatz ist eine falsche Aussage, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

$a_n = (-1)^n$

Es gilt $-1 \leq a_n \leq 1$, demnach ist (a_n) beschränkt. Aber (a_n) besitzt offensichtlich keinen Grenzwert.

Alternatives Gegenbeispiel: $a_n = \sin(n)$

b) Den Wurzelterm kann man zunächst, wegen der Differenz, nicht vereinfachen.

Mithilfe der 3.binomischen Formel kann man den Term durch Erweitern umformen.

$$b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n} = \frac{\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}\right)}{\left(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}\right)}$$

$$b_n = \frac{n^2 + 2n - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{n^2 + 2n - n^2 + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - n}}$$

Kürzt man diesen Bruch jetzt mit n, dann folgt:

$$b_n = \frac{3}{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} + \frac{\sqrt{n^2-n}}{n}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

Für $n \to \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Damit folgt mit den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen:

sowohl $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$

als auch $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$

AUFGABE 3

a)1) Induktionsanfang: $n = 2$

$p_2(x) = (1-x)\cdot(1+x)\cdot\left(1+x^{2^{2-1}}\right) = (1-x^2)\cdot(1+x^2) = 1-x^4 = 1-x^{2^2}$

Somit ist die Behauptung für $n = 2$ nachgewiesen.

2) Induktionsschritt: Für ein $k \in IN$ mit $k \geq 2$ gilt:

$p_k(x) = (1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = 1-x^{2^k} \quad (*)$

Zu zeigen ist: $p_{k+1}(x) = (1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^k}\right) = 1-x^{2^{k+1}}$

$$p_{k+1}(x) = \underbrace{(1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{k-1}}\right)}_{1-x^{2^k}\text{ wegen }(*)}\cdot\left(1+x^{2^k}\right)$$

Die 3.binomische Formel und die Potenzgesetze liefern:

$$p_{k+1}(x) = \left(1-x^{2^k}\right)\cdot\left(1+x^{2^k}\right) = 1-\left(x^{2^k}\right)^2 = 1-x^{2^k\cdot 2} = 1-x^{2^{k+1}}$$

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle $n \in IN$.

b) Sei $n = 1$ ➔ $p_1(x) = 1-x^2 = (1-x)\cdot(1+x) = 0$

Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Somit hat p_1 genau die beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Für $n \geq 2$ gilt: $p_n(x) = (1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = 0$

Auch dieses Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Die beiden ersten Klammern können den Wert Null annehmen.

➔ $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ sind Nullstellen von p_n.

Die restlichen Klammern haben alle die Form:

$1 + x^{2^i} = 1 + x^{2^{i-1} \cdot 2} = 1 + \left(x^{2^{i-1}}\right)^2$ für $i \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$

Da $\left(x^{2^{i-1}}\right)^2 \geq 0$ gilt (Quadrate sind nie negativ), folgt $1 + \left(x^{2^{i-1}}\right)^2 \geq 1$

für alle $i \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$.

Daher nehmen alle Klammern, außer den beiden ersten Klammern, nie den Wert Null an.

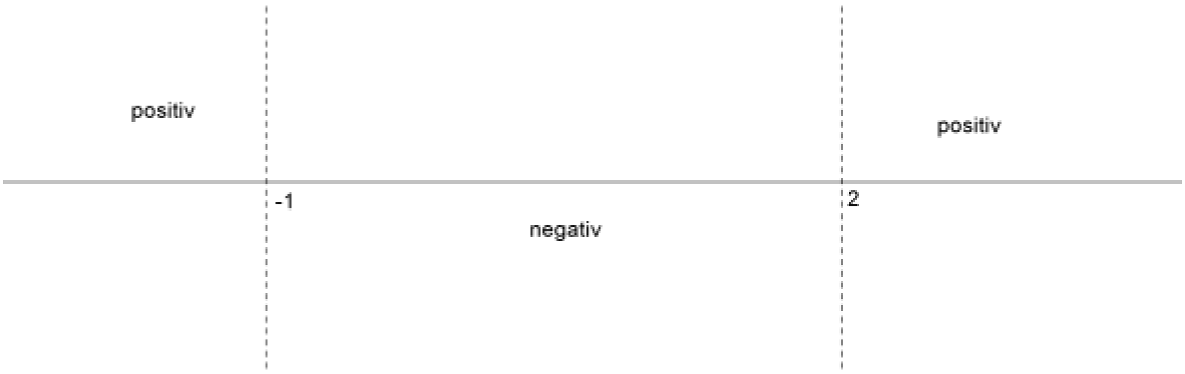
Somit haben alle p_n nur die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

AUFGABE 4

a) Um die Ungleichung umzuformen, muss man mit dem Nenner des Bruches multiplizieren. Somit muss man sich zuerst Klarheit über das Vorzeichen des Nenners für verschiedene Werte von x machen.

Die (einfachen) Nullstellen des Nenners lauten: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

Die Abbildung zeigt eine Gebietseinteilung für das Vorzeichen des Nenners:



Bei einfachen Nullstellen wechselt jeweils das Vorzeichen

Fall 1: $-1 < x < 2$

Multiplizieren mit dem negativen Nenner liefert: $4x - 5 \geq 0$

➔ $x \geq \frac{5}{4}$ ➔ $L_1 = \left[\frac{5}{4}; 2\right)$

Fall 2: $x < -1$ oder $x > 2$

Multiplizieren mit dem positiven Nenner liefert: $4x - 5 \leq 0$

➔ $x \leq \frac{5}{4}$ ➔ $L_2 = (-\infty; -1)$

➔$L = L_2 \cup L_{12} = (-\infty; -1) \cup \left[\frac{5}{4}; 2\right)$

b) Zunächst muss man auf der linken Seite der Gleichung die beiden Brüche so erweitern, dass sie den gemeinsamen Nenner $(x+1)\cdot(x-2)$ besitzen.

$$\frac{4x-5}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

$$\frac{4x-5}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(A+B)\cdot x+B-2A}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

Da die beiden Terme äquivalent sein sollen (d.h. für alle x den gleichen Wert liefern) müssen die Koeffizienten gleich sein.

Somit erhält man folgendes LGS für A und B:

$A+B=4 \quad (I)$
$B-2A=-5 \quad (II)$

Aus $(I)-(II)$ folgt $3A=9$ bzw. $A=3$

Einsetzen in (I) liefert: $B=1$

c) Nullstellen: Ein Bruch nimmt den Wert Null an, falls sein Zähler Null wird.

Aus $4x-5=0$ folgt $x_3=\frac{5}{4}$ ist die einzige Nullstelle von f.

Da x_3 eine einfache Nullstelle ist, wechselt das Vorzeichen von f an der Nullstelle.

Aus der Teilaufgabe a) kennt man den Bereich, indem die Funktionswerte von f negativ sind.

Zudem sind die beiden Definitionslücken $x_1=-1$ und $x_2=2$ von f Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Somit hat der Graph von f die beiden senkrechten Asymptoten $x=-1$ und $x=2$.

Waagrechte Asymptote $y=0$ (Da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.)

Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt $Y(0|f(0))$ ➔ $Y(0|2{,}5)$

Die Abbildung zeigt den Graphen von f einschließlich dessen Asymptoten: