Universität Stuttgart

MINT-KOLLEG BADEN-WÜRTTEMBERG

Zertifikatsklausur **28.9.2018**

Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgende Aussage für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\big)$.

b) Vor einem Fußballturnier fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Ausgang. Über die drei Favoriten A, B und C werden folgende vier Vermutungen geäußert:

(i) B gewinnt oder C gewinnt.
(ii) Wenn B Zweiter wird, dann gewinnt A.
(iii) Wenn B Dritter wird, dann gewinnt C nicht.
(iv) A wird Zweiter oder B wird Zweiter.

Am Ende des Turniers belegen die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze. Es stellt sich heraus, dass alle vier Vermutungen richtig waren.

Welche Plätze erzielten A, B und C?

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Da die dritte Spalte $(A \Leftrightarrow B)$ und die letzte Spalte $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ in den Wahrheitswerten übereinstimmen, ist der Beweis erbracht.

Alternative Lösung:
In der Tabelle eine zusätzliche Spalte für die Aussage $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\big)$, in der als Wahrheitswerte lauter w stehen
Schlussatz: In der letzten Spalte steht nur der Wahrheitswert w, also ist die Aussage bewiesen.

b)
- (i) bedeutet, dass A nicht gewinnt.
- Aus (ii) folgt dann, dass B nicht Zweiter wird.
- Also wird nach (iv) A Zweiter.
- B ist nicht Dritter: Wenn B Dritter wäre, dann dürfte nach (iii) C nicht gewinnen. Also wäre (i) nicht erfüllt.
- B kann nun weder Zweiter noch Dritter sein, muss also Erster sein.
- Da die Plätze Eins und Zwei bereits vergeben sind, bleibt für C genau der dritte Platz übrig.

Hinweis: Da in der Aufgabenstellung steht, dass alle Aussagen richtig sind und sich die Plätze eindeutig ergeben, muss nicht mehr nachgeprüft werden, ob alle drei Aussagen mit der angegebenen Reihung wahr sind.

Tabellarische Lösung (Testen aller Möglichkeiten):

A	B	C	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
1.	2.	3.	f	w	w	w
1.	3.	2.	f	w	w	f
2.	1.	3.	w	w	w	w
2.	3.	1.	w	w	f	w
3.	1.	2.	w	w	w	f
3.	2.	1.	w	f	w	w

In der Tabelle sind alle Möglichkeiten aufgeführt. Es gibt nur einen Fall, in dem alle vier Aussagen wahr sind, nämlich die dritte Zeile. Somit folgt aus den Aussagen (i) - (iv) eindeutig, dass B Erster, A Zweiter und C Dritter geworden ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Geben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:

a$_1$) (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
a$_2$) (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.
a$_3$) (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
a$_4$) (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.

b) Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Was kann man über die Folge $(a_n \cdot b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)

c) Es sei (a_n) eine gegen a konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich m, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folge (a_n^m) konvergiert gegen a^m.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Teil b).

Lösung:

a) **a$_1$**) $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$: $a_n \cdot b_n = (-1)^n \Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
a$_2$) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$: $a_n \cdot b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.
a$_3$) $a_n = b_n = n$: $a_n \cdot b_n = n^2 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
a$_4$) $a_n = b_n = (-1)^n$: $a_n \cdot b_n = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.

b) Aus den angegebenen Voraussetzungen folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

c) **Induktionsanfang** $m = 1$: Wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann konvergiert (a_n^1) gegen a^1. Dies ist offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: Es sei bereits für ein festes $m \in \mathbb{N}$ bewiesen, dass gilt: Wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann konvergiert (a_n^m) gegen a^m.

Es gilt $a_n^{m+1} = a_n^m \cdot a_n$.
Aus der Induktionsvoraussetzung: $a_n^m \to a^m$.
Der Satz aus Teil b) liefert $a_n^m \cdot a_n \to a^m \cdot a$.
Dies beweist, dass (a_n^{m+1}) gegen a^{m+1} konvergiert.

Induktionsschluss: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert (a_n^m) gegen a^m.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Polynomfunktion $p(x) = 6x^2 - 12x + 7$ für alle reellen Werte von x positive Werte annimmt.

b) Gegeben sind die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\sqrt{6x^2-12x+7} &= 3x-2 \qquad (1)\\ \sqrt{6x^2-12x+7} &= 2-3x \qquad (2)\end{aligned}$$

Untersuchen Sie beide Gleichungen auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

c) Bestimmen Sie, für welche rellen Zahlen x die Ungleichung

$$\sqrt{6x^2-12x+7} \le 3x-2$$

erfüllt ist.

Lösung:

a) Quadratische Ergänzung liefert

$$p(x) = 6x^2-12x+7 = 6(x-1)^2-6+7 = 6(x-1)^2+1 \ge 1.$$

Insbesondere ist $p(x)$ immer positiv.

Alternative Lösung:

$$p(x) = 6x^2-12x+7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2-4\cdot 6\cdot 7}}{12} = \frac{12 \pm \sqrt{144-168}}{12}.$$

Da unter der Wurzel eine negative Zahl steht, besitzt p keine reellen Nullstellen. Da $p(0) = 7 > 0$ ist, ist $p(x)$ immer positiv.

b) Aus beiden Gleichungen folgt durch Quadrieren

$$\begin{aligned}6x^2-12x+7 &= (3x-2)^2 = 9x^2-12x+4\\ \Leftrightarrow\ 3 &= 3x^2\\ \Leftrightarrow\ x &= \pm 1\end{aligned}$$

$x = \pm 1$ Eingesetzt:

$$\begin{aligned}\sqrt{6x^2-12x+7} &\overset{x=1}{=} \sqrt{1} = 1 \overset{x=1}{=} 3x-2\\ \sqrt{6x^2-12x+7} &\overset{x=-1}{=} \sqrt{25} = 5 \overset{x=-1}{=} 2-3x\end{aligned}$$

Für $x = 1$ ist also Gleichung (1) erfüllt, für $x = -1$ Gleichung (2).

c) Nach a) ist der Wurzelausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Da die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{6x^2-12x+7}$ und die lineare Funktion $g(x) = 3x-2$ nur einen Schnittpunkt bei $x = 1$ haben, genügt eine Punktprobe:

$$\sqrt{6x^2-12x+7} \overset{x=0}{=} \sqrt{7} > -2 \overset{x=0}{=} 3x-2.$$

Also gilt $\sqrt{6x^2-12x+7} > 3x-2$ für $x < 1$.
Somit ist die gegebene Ungleichung für $x \ge 1$ erfüllt.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Gegeben sind vier positive reelle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2}$.

Beweisen Sie, dass dann $\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \le \frac{a_2}{b_2}$ gilt.

b) Gegeben sind $2n$ positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit der Eigenschaft

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \le \ldots \le \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \le \frac{a_n}{b_n}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots b_n} \le \frac{a_n}{b_n}$$

gilt.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} && \Big| \cdot b_1(b_1+b_2) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & a_1(b_1+b_2) \le (a_1+a_2)b_1 \\ \Leftrightarrow\ & a_1b_1 + a_1b_2 \le a_1b_1 + a_2b_1 && \Big| - a_1b_1 \\ \Leftrightarrow\ & a_1b_2 \le a_2b_1 && \Big| : b_1b_2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist und lauter Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist die erste Ungleichung bewiesen.

Genauso gilt

$$\begin{aligned} & \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \le \frac{a_2}{b_2} && \Big| \cdot (b_1+b_2)b_2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a_1+a_2)b_2 \le a_2(b_1+b_2) && \Big| - a_2b_2 \\ \Leftrightarrow\ & a_1b_2 \le a_2b_1 && \Big| : b_1b_2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, folgt die Gültigkeit der ersten Ungleichung.

b) **Induktionsanfang** $n = 2$**:** Aus $\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2}$ folgt nach Teil a), dass

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \le \frac{a_2}{b_2}$$

gilt.

Induktionsschritt: Es seien nun $2n+2$ positive Zahlen $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots b_{n+1}$ gegeben, die entsprechend die Voraussetzungen

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \le \dots \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

erfüllen. Aus der Induktionsvoraussetzung und $\frac{a_n}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ erhält man

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Anwendung von Teil a) auf die rechte Ungleichung liefert

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n} \le \frac{(a_1+\dots+a_n)+a_{n+1}}{(b_1+\dots+b_n)+b_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

also insbesondere

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{b_1+\dots+b_n+b_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Induktionsschluss: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ folgt aus den Voraussetzungen

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n} \le \frac{a_n}{b_n}.$$

Statistik zur Zertifikatsklausur 2018

Anzahl Teilnehmer: 1128

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 13,7 Punkte

Median: 13,5 Punkte