Universität Stuttgart

MINT-KOLLEG BADEN-WÜRTTEMBERG

Zertifikatsklausur **28.9.2018**

Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgende Aussage für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\big)$.

b) Vor einem Fußballturnier fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Ausgang. Über die drei Favoriten A, B und C werden folgende vier Vermutungen geäußert:

(i) B gewinnt oder C gewinnt.
(ii) Wenn B Zweiter wird, dann gewinnt A.
(iii) Wenn B Dritter wird, dann gewinnt C nicht.
(iv) A wird Zweiter oder B wird Zweiter.

Am Ende des Turniers belegen die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze. Es stellt sich heraus, dass alle vier Vermutungen richtig waren.

Welche Plätze erzielten A, B und C?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Geben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:

$\mathbf{a_1}$) (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
$\mathbf{a_2}$) (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.
$\mathbf{a_3}$) (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist divergent.
$\mathbf{a_4}$) (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.

b) Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Was kann man über die Folge $(a_n \cdot b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)

c) Es sei (a_n) eine gegen a konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich m, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folge (a_n^m) konvergiert gegen a^m.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Teil b).

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Polynomfunktion $p(x) = 6x^2 - 12x + 7$ für alle reellen Werte von x positive Werte annimmt.

b) Gegeben sind die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{6x^2 - 12x + 7} &= 3x - 2 \qquad (1) \\ \sqrt{6x^2 - 12x + 7} &= 2 - 3x \qquad (2) \end{aligned}$$

Untersuchen Sie beide Gleichungen auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

c) Bestimmen Sie, für welche rellen Zahlen x die Ungleichung

$$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$$

erfüllt ist.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Gegeben sind vier positive reelle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$.

Beweisen Sie, dass dann $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$ gilt.

b) Gegeben sind $2n$ positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit der Eigenschaft

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \ldots \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

gilt.