Vertiefungskurs Mathematik

Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 28.09.2018

AUFGABE 1

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

A	B	$\overbrace{A \Leftrightarrow B}^{\gamma}$	$\overbrace{A \wedge B}^{\alpha}$	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg A \wedge \neg B}^{\beta}$	$\overbrace{\alpha \vee \beta}^{\delta}$	$\gamma \Leftrightarrow \delta$
f	f	w	f	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f	w
w	w	w	w	f	f	f	w	w

Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) Aus (i) folgt, dass A nicht auf Platz 1 liegen kann.

Annahme: C liegt auf Platz 1.

Mit (ii) folgt dann sofort, dass B nicht auf Platz 2 liegen kann ➔ B ist Dritter.
Aus (iii) folgt dann sofort, dass C nicht auf Platz 1 liegen kann.

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Demnach ist die Annahme falsch und damit muss, wegen (i) B auf Platz 1 liegen.

Dann folgt sofort mit (iv), dass A Zweiter ist (da B ja nicht Zweiter sein kann).

Somit bleibt für C nur noch der Platz 3 übrig.

Ergebnis:

1.Platz	2.Platz	3.Platz
B	A	C

AUFGABE 2

a$_1$) Beispiel: (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge und (b_n) mit $b_n = n^2$ ist divergent

➔ die Folge $(a_n \cdot b_n)$ mit $a_n \cdot b_n = n$ ist divergent

a$_2$) Beispiel: (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^2}$ ist eine Nullfolge und (b_n) mit $b_n = n$ ist divergent

➔ die Folge $(a_n \cdot b_n)$ mit $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, also konvergent

a$_3$) Beispiel: (a_n) mit $a_n = n$ ist divergent und (b_n) mit $b_n = n^2$ ist divergent

➔ die Folge $(a_n \cdot b_n)$ mit $a_n \cdot b_n = n^3$ ist divergent a$_4$) Beispiel: (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 0\ für\ n\ gerade \\ 1\ für\ n\ ungerade \end{cases}$ ist divergent

(b_n) mit $b_n = \begin{cases} 1\ für\ n\ gerade \\ 0\ für\ n\ ungerade \end{cases}$ ist divergent

➔ die Folge $(a_n \cdot b_n)$ mit $a_n \cdot b_n = 0$ ist eine Nullfolge und damit konvergent

b) Mit einem der Grenzwertsätzen folgt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$$

c) 1) Induktionsanfang: $m = 1$; $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a = a^1$

Somit ist die Behauptung für $m = 1$ nachgewiesen.

2) Induktionsschritt: Für ein $k \in IN$ mit $k \geq 1$ gilt: $\lim_{n\to\infty}({a_n}^k) = a^k \quad (*)$

Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty}({a_n}^{k+1}) = a^{k+1}$

$\lim_{n\to\infty}({a_n}^{k+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot {a_n}^k)$

Sei ${a_n}^k \coloneqq b_n$, dann folgt mit $(*)$ sofort $\lim_{n\to\infty}({a_n}^k) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = a^k$

Demnach sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen und somit die Voraussetzungen von Teilaufgabe b) erfüllt.

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot {a_n}^k) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot a^k = a^{k+1}$$

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle $m \in IN$.

AUFGABE 3

a) Weg 1:

p ist eine quadratische Funktion und daher der Graph eine Parabel 2.Grades. Da der Koeffizient vor dem quadratischen Glied positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet, d.h. der Scheitel ist der tiefste Punkt der Parabel.

Bestimmung der Scheitelform von p:

$p(x) = 6x^2 - 12x + 7 = 6x^2 - 12x + 6 + 1 = 6 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 1$

$p(x) = 6 \cdot (x-1)^2 + 1$

Der Scheitel lautet $S(1|1)$ und somit gilt für alle $x \in IR$: $p(x) \geq 1 > 0$

Weg 2: (Scheitelbestimmung mithilfe der Nullstellen von p*)

Der x- Wert x_S des Scheitels S liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen der quadratischen Funktion p* mit $p^*(x) = 6x^2 - 12x$.(um 7 nach unten verschoben)

Nullstellen von p*: $p^*(x) = 6x^2 - 12x = 6x \cdot (x-2)$ ➔ $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Somit gilt $x_S = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$ ➔ $S(1|p(1))$ ➔ $S(1|1)$

Weg 3: (Minimum mithilfe der Differentialrechnung)

Es gilt: $p(x) = 6x^2 - 12x + 7$ ➔ $p'(x) = 12x - 12$ ➔ $p''(x) = 12$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: ➔ $p'(x) = 12x - 12 = 0$

➔ $x_1 = 1$ (einziger Kandidat für eine Extremstelle)

Überprüfung mit der 2.Ableitung: ➔ $p''(1) = 12 > 0$

Also liegt bei $x_1 = 1$ ein Minimum von p vor. Es gilt $p(1) = 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7 = 1$

Demnach gilt für alle $x \in IR$: $p(x) \geq 1 > 0$

b) $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 3x - 2$

Aus Teilaufgabe a) folgt, dass die Wurzel für alle $x \in IR$ definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

$6x^2 - 12x + 7 = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

Umformen liefert: $3 = 3x^2$ bzw. $x^2 = 1$ ➔ $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist, muss man jeweils die Probe in der Ausgangsgleichung vornehmen.

Probe für $x_1 = 1$: $\sqrt{6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7} = 3 \cdot 1 - 2$

$1 = 1$ ➔ wahre Aussage

Probe für $x_2 = -1$: $\sqrt{6 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 7} = 3 \cdot (-1) - 2$

$5 = -5$ ➔ falsche Aussage

Lösungsmenge $L = \{1\}$

$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 2 - 3x$

Aus Teilaufgabe a) folgt, dass die Wurzel für alle $x \in IR$ definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

$6x^2 - 12x + 7 = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

Umformen liefert: $3 = 3x^2$ bzw. $x^2 = 1$ ➔ $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist, muss man jeweils die Probe in der Ausgangsgleichung vornehmen.

Probe für $x_1 = 1$: $\sqrt{6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7} = 2 - 3 \cdot 1$

$1 = -1$ ➔ falsche Aussage

Probe für $x_2 = -1$: $\sqrt{6 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 7} = 2 - 3 \cdot (-1)$

$5 = 5$ ➔ wahre Aussage

Lösungsmenge $L = \{-1\}$

c) Die Ungleichung $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$ besitzt als Grenzfall die Gleichung $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 3x - 2$ aus der Teilaufgabe b).

Diese Gleichung hat als einfache Lösung $x_1 = 1$, d.h. die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{6x^2 - 12x + 7} - (3x - 2)$ hat die einfache Nullstelle $x_1 = 1$.

Somit wechselt f das Vorzeichen an der Stelle $x_1 = 1$.

Eine Punktprobe für z.B. $x_0 = 0$ liefert:

$f(0) = \sqrt{6 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 7} - (3 \cdot 0 - 2) = \sqrt{7} + 2 > 0$

Demnach gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \geq 1$

Somit folgt: $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$ für alle $x \geq 1$

Alternativer Lösungsweg:

$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$

Da die linke Seite der Ungleichung nicht negativ ist, muss x so gewählt werden, dass auch die rechte Seite der Ungleichung nicht negativ ist.

Somit muss gelten: $3x - 2 \geq 0$ ➔ $x \geq \frac{2}{3}$

Da für $x \geq \frac{2}{3}$ beide Seiten nicht negativ sind, ist das Quadrieren der Ungleichung in diesem Fall eine Äquivalenzumformung.

Quadrieren auf beiden Seiten der Ungleichung liefert:

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 12x + 7 &\leq 9x^2 - 12x + 4 \\
3 &\leq 3x^2 \\
1 &\leq x^2
\end{aligned}
$$

Mit $x \geq \frac{2}{3}$ folgt: $x \geq 1$

Also gilt: $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$ für alle $x \geq 1$

AUFGABE 4

a) Aus $\frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_1}{b_1}$ und $b_2 > 0$ folgt $a_2 \geq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_2$ bzw. $a_2 \geq \frac{b_2}{b_1} \cdot a_1 \quad (I)$

Addiert man a_1 auf beiden Seiten der Ungleichung (I) , so folgt:

$a_1 + a_2 \geq a_1 + \frac{b_2}{b_1} \cdot a_1$ bzw. $a_1 + a_2 \geq a_1 \cdot \left(1 + \frac{b_2}{b_1}\right) \quad (II)$

Dividieren der Ungleichung (II) auf beiden Seiten durch $b_1 + b_2 > 0$ liefert:

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \geq \frac{a_1 \cdot \left(1 + \frac{b_2}{b_1}\right)}{b_1 + b_2} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{b_1 + b_2}{b_1}\right)}{b_1 + b_2} = \frac{\frac{a_1}{b_1} \cdot (b_1 + b_2)}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1}$$

Damit ist der linke Teil der Ungleichungskette bewiesen.

Aus $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$ und $b_1 > 0$ folgt $a_1 \leq \frac{a_2}{b_2} \cdot b_1$ bzw. $a_1 \leq \frac{b_1}{b_2} \cdot a_2 \quad (III)$

Addiert man a_2 auf beiden Seiten der Ungleichung (III) , so folgt:

$a_1 + a_2 \leq a_2 + \frac{b_1}{b_2} \cdot a_2$ bzw. $a_1 + a_2 \leq a_2 \cdot \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right) \quad (IV)$

Dividieren der Ungleichung (IV) auf beiden Seiten durch $b_1 + b_2 > 0$ liefert:

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_2 \cdot \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)}{b_1 + b_2} = \frac{a_2 \cdot \left(\frac{b_1 + b_2}{b_2}\right)}{b_1 + b_2} = \frac{\frac{a_2}{b_2} \cdot (b_1 + b_2)}{b_1 + b_2} = \frac{a_2}{b_2}$$

Damit ist der rechte Teil der Ungleichungskette bewiesen.

b) 1) Induktionsanfang: $n = 2 \quad ; \quad \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \quad ; \quad a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$

$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$ wurde bereits in Teilaufgabe a) nachgewiesen.

2) Induktionsschritt: Für ein $k \in IN$ mit $k \geq 2$ gilt:

Aus $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \cdots \leq \frac{a_k}{b_k}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k > 0$ folgt

$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{b_1+b_2+\cdots+b_k} \leq \frac{a_k}{b_k} \quad (*)$

Zu zeigen:

Aus $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \cdots \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}, b_1, b_2, \ldots, b_{k+1} > 0$ folgt

$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$

Sei $c_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ und $d_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

Es gilt offensichtlich $c_k, d_k > 0$

Mit $(*)$ folgt: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{b_1+b_2+\cdots+b_k} = \frac{c_k}{d_k} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$

Aus $\frac{c_k}{d_k} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ folgt mit Teilaufgabe a) $\frac{c_k}{d_k} \leq \frac{c_k+a_{k+1}}{d_k+b_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$

Mit $(*)$ folgt: $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{c_k}{d_k}$

Somit gilt: : $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{c_k}{d_k} \leq \frac{c_k+a_{k+1}}{d_k+b_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$

Einsetzen von c_k und d_k liefert: $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle $n \in IN$.