Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \;\wedge\; \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Bei einem Ausflug unterhält sich eine Gruppe von Schülern, es ist von Aki, Bauzi, Chips und Dani die Rede. Die Lehrerin möchte wissen, wovon die Schüler reden. Ein Schüler antwortet: „Von einem Jungen, einem Mädchen, einem Hund und einer Katze.“ Außerdem bekommt die Lehrerin folgende Hinweise:

(1) Die Katze heißt Chips.
(2) Aki ist nicht der Junge und Bauzi ist nicht das Mädchen.
(3) Wenn Dani das Mädchen ist, dann ist Aki der Hund.

Die Lehrerin meint, da gäbe es mehrere Möglichkeiten. Daraufhin lachen die Schüler los, und einer sagt: „Die Hinweise sind alle falsch.“ Nach kurzem Überlegen weiß die Lehrerin Bescheid.

b$_1$) Zeigen Sie, dass die Bedingungen (1), (2), (3) mindestens zwei verschiedene Zuordnungen der Namen zulassen.

b$_2$) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3).
Hinweis: Die Äquivalenz aus Teil a) darf verwendet werden.

b$_3$) Wie heißen der Junge, das Mädchen, die Katze und der Hund? Weisen Sie nach, dass die Lösung eindeutig ist.

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \;\wedge\; \neg B)$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	f	w

Der Beweis ist erbracht, da die letzte Spalte nur w enthält.

b) **b$_1$)** Folgende Lösungen sind möglich (es reichen zwei davon):
(i) Die Katze heißt Chips, das Mädchen Dani, der Hund Aki, der Junge Bauzi.
(ii) Die Katze heißt Chips, das Mädchen Aki, der Hund Bauzi, der Junge Dani.
(iii) Die Katze heißt Chips, das Mädchen Aki, der Hund Dani, der Junge Bauzi.

b$_2$) $\neg(1)$: Die Katze heißt nicht Chips.
$\neg(2)$: Aki ist der Junge oder Bauzi ist das Mädchen.
$\neg(3)$: Dani ist das Mädchen und Aki ist nicht der Hund.

b$_3$) Aus $\neg(3)$: Das Mädchen heißt Dani.
Mit dieser Information folgt aus $\neg(2)$, dass der Junge Aki heißt.

Da nach $\neg(1)$ die Katze nicht Chips heißt und nach dem Vorherigen auch nicht Dani oder Aki heißen kann, muss sie Bauzi heißen.
Für den Hund bleibt nur noch Chips übrig. Die Lösung ist also eindeutig:
Das Mädchen heißt Dani, der Junge Aki, die Katze Bauzi, der Hund Chips.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass p die Nullstelle $x = -2$ besitzt.
b) Beweisen Sie, dass p keine weitere reelle Nullstelle besitzt.
c) Bestimmen Sie alle drei x-Werte, für die $p(x)$ den Wert 8 annimmt.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $p(x) \leq 8,\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) $p(-2) = -8 - 4 + 4 + 8 = 0$.
b) Polynomdivision liefert $p(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 4)$.
Das bedeutet: $p(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 = 0 \;\vee\; x^2 - 3x + 4 = 0$.
$x^2 - 3x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{16}{4}}$.
Da die Diskriminante negativ ist, besitzt p keine weiteren reellen Nullstellen.
c)
$$\begin{aligned} p(x) = 8 \;&\Leftrightarrow\; x^3 - x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x(x^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_{2,3} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow\; x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1. \end{aligned}$$
d) Nach der letzten Teilaufgabe gilt $p(x) - 8 = x(x - 2)(x + 1)$. Man kann direkt ablesen:
Für $x \leq -1$ sind alle drei Faktoren negativ oder Null $\Rightarrow\; p(x) - 8 \leq 0$
Für $-1 < x < 0$ sind zwei der drei Faktoren negativ und einer positiv $\Rightarrow\; p(x) - 8 > 0$
Für $0 \leq x \leq 2$ ist nur einer der drei Faktoren negativ oder Null $\Rightarrow\; p(x) - 8 \leq 0$
Für $x > 2$ sind alle drei Faktoren positiv $\Rightarrow\; p(x) - 8 > 0$
Lösungsmenge: $L = (-\infty, -1] \cup [0, 2]$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder a_n $(n \in \mathbb{N})$ besitzt.

a) Es sei (a_n) eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von (a_n) gegen a an.
b) Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ gilt. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.
c) Sei (b_n) eine Folge mit $|b_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (b_n) gegen 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.
d) Sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq \dfrac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter die Folge (d_n) definiert durch
$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = c_n \cdot d_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$
Beweisen Sie, dass die Folge (d_n) gegen Null konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Lösung:

a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$ (oder $n \geq N(\varepsilon)$) gilt.

b) Da die Logarithmusfunktion monoton wachsend ist, gilt

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(\varepsilon) \quad \overset{\ln(1/2)<0}{\Leftrightarrow} \quad n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Wählt man nun $N(\varepsilon) \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1/2)}$, so folgt für $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} < \varepsilon.$$

Also ist die Definition der Konvergenz gegen Null erfüllt.
Alternative Lösung: Es gilt $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wählt man nun $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, so folgt für $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} \leq \varepsilon.$$

Also ist die Definition der Konvergenz gegen Null erfüllt.

c) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es nach der vorherigen Teilaufgabe ein $N(\varepsilon)$, so dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$.
Für $n \geq N(\varepsilon)$ folgt dann

$$|b_n - 0| = |b_n| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Dies beweist, dass (a_n) gegen Null konvergiert.

d) Behauptung: Es gilt $|d_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweis durch Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$: $|d_1| = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \;\Rightarrow\;$ der Induktionsanfang ist erfüllt.
Induktionsschritt: Sei $|d_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Dann folgt

$$|d_{n+1} = |c_{n+1} \cdot d_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |d_n| \overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung $|d_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ bewiesen.
Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|d_n| \leq \frac{1}{2^n}$.

Nun folgt aus der letzten Teilaufgabe, dass die Folge (d_n) gegen Null konvergiert.
Anstelle des Induktionsbeweises wird auch ein Plausibilitätsbeweis mit voller Punktzahl bewertet:

$$|d_1| = \frac{1}{2},\; |d_2| = |c_1| \cdot |d_1| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2},\; |d_3| = |c_2| \cdot |d_2| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3}, \ldots$$
$$\Rightarrow\; |d_n| \leq \frac{1}{2^n} \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

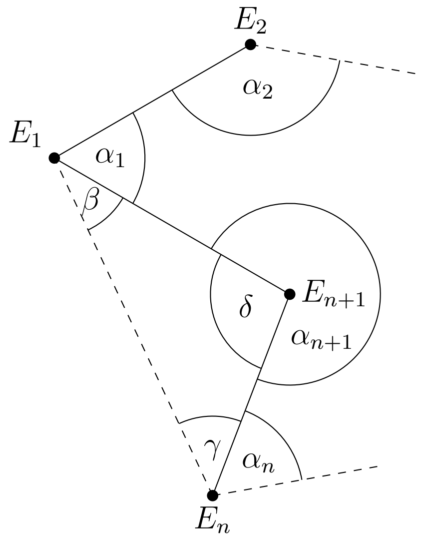
Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein einfaches n-Eck hat n verschiedene Eckpunkte $E_1, \ldots, E_n$, die durch Kanten verbunden sind. Außerdem schneiden sich die Kanten nicht, und für die Innenwinkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ an den Ecken gilt $\alpha_j \neq 0°, 180°, 360°$ für $j = 1, \ldots, n$.

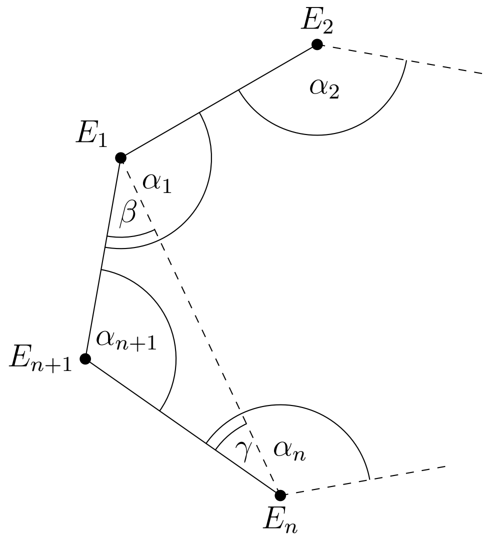
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summe S_n der Innenwinkel in einem einfachen n-Eck mit $n \geq 3$ gilt: $S_n = (n-2) \cdot 180°$. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt.

Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\alpha_{n+1} > 180°$ und $\alpha_{n+1} < 180°$. Verwenden Sie die in der jeweiligen Skizze eingezeichnete Hilfslinie.

Fall $\alpha_{n+1} > 180°$



Fall $\alpha_{n+1} < 180°$



Lösung:

a) Induktionsanfang $n = 3$: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $S_2 = 180° = (3-2)\cdot 180°$. Damit ist der Induktionsanfang wahr.

Induktionsschritt: Für die Winkelsumme der Innenwinkel in jedem n-Eck gelte $S_n = (n-2)\cdot 180°$. Sei ein $(n+1)$-Eck gegeben. Für den Innenwinkel α_{n+1} in der $(n+1)$-ten Ecke gilt entweder $0 < \alpha_{n+1} < 180°$ oder $180° < \alpha_{n+1} < 360°$.

Fall $180° < \alpha_{n+1} < 360°$: Wir verwenden die Hilfsstrecke und die Bezeichnungen wie in der linken Skizze. Durch $E_1, \ldots, E_n$ wird mit der Hilfslinie und nach Weglassen der Ecke E_{n+1} und der Kanten $\overline{E_nE_{n+1}}$ und $\overline{E_{n+1}E_1}$ ein n-Eck gebildet. Die Innenwinkel sind

$$(\alpha_1+\beta), \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, (\alpha_n+\gamma).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt im n-Eck $E_1, \ldots, E_n$

$$\alpha_1+\beta+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n+\gamma \;=\; (n-2)\cdot 180°. \qquad (*)$$

Außerdem gelten

$$\begin{aligned}&\beta+\gamma+\delta = 180° \quad \text{(Winkelsumme im Dreieck } E_n, E_{n+1}, E_1,\text{)}\\ &\delta = 360° - \alpha_{n+1}.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\beta+\gamma+360°-\alpha_{n+1} = 180° \;\Leftrightarrow\; \beta+\gamma = \alpha_{n+1}-180°.$$

Setzt man dies in die Gleichung $(*)$ ein, so folgt

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}-180° = (n-2)\cdot 180°.$$

Addition von $180°$ auf beiden Seiten ergibt

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1} = (n-2)\cdot 180° + 180° = \big((n+1)-2\big)\cdot 180°.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung im ersten Fall bewiesen.

Sei nun $0° < \alpha_{n+1} < 180°$: Wir verwenden die Hilfsstrecke und die Bezeichnungen wie in der rechten Skizze. Durch $E_1, \ldots, E_n$ wird mit der Hilfslinie und nach Weglassen der Ecke E_{n+1} und der Kanten $\overline{E_nE_{n+1}}$ und $\overline{E_{n+1}E_1}$ ein n-Eck gebildet. Die Innenwinkel sind

$$(\alpha_1-\beta), \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, (\alpha_n-\gamma).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt im n-Eck $E_1, \ldots, E_n$

$$\alpha_1 - \beta + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n - \gamma \;=\; (n-2) \cdot 180^\circ. \qquad (**)$$

Außerdem gelten

$$\beta + \gamma + \alpha_{n+1} = 180^\circ \quad \text{(Winkelsumme im Dreieck } E_n, E_1, E_{n+1}\text{)}.$$

Daraus erhalten wir

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha_{n+1}.$$

Setzt man dies in die Gleichung $(**)$ ein, so folgt

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} - 180^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Addition von 180° auf beiden Seiten ergibt

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} = (n-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = \big((n+1) - 2\big) \cdot 180^\circ.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung auch im zweiten Fall bewiesen.

Induktionsschluss: In jedem n-Ecke mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$ gilt für die Summe der Innenwinkel $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

Hinweis: Diese Lösung ist die erwartete, aber sie ist nicht vollständig. Man muss noch zeigen, dass es immer eine Ecke gibt, so dass die vorgeschlagene Hilfslinie keine Kante schneidet. Dies übersteigt jedoch den Erwartungshorizont.

Falls ein Schüler oder eine Schülerin dieses Problem sieht, werden sinnvolle Aussagen großzügig bepunktet.

Statistik zur Zertifikatsklausur 2017

Anzahl Teilnehmer: 1041

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 13,8 Punkte

Median: 13 Punkte