Zertifikatsklausur **6.10.2017**

Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \;\wedge\; \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Bei einem Ausflug unterhält sich eine Gruppe von Schülern, es ist von Aki, Bauzi, Chips und Dani die Rede. Die Lehrerin möchte wissen, wovon die Schüler reden. Ein Schüler antwortet: „Von einem Jungen, einem Mädchen, einem Hund und einer Katze.“ Außerdem bekommt die Lehrerin folgende Hinweise:

(1) Die Katze heißt Chips.
(2) Aki ist nicht der Junge und Bauzi ist nicht das Mädchen.
(3) Wenn Dani das Mädchen ist, dann ist Aki der Hund.

Die Lehrerin meint, da gäbe es mehrere Möglichkeiten. Daraufhin lachen die Schüler los, und einer sagt: „Die Hinweise sind alle falsch.“ Nach kurzem Überlegen weiß die Lehrerin Bescheid.

b_1) Zeigen Sie, dass die Bedingungen (1), (2), (3) mindestens zwei verschiedene Zuordnungen der Namen zulassen.

b_2) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3).
Hinweis: Die Äquivalenz aus Teil a) darf verwendet werden.

b_3) Wie heißen der Junge, das Mädchen, die Katze und der Hund? Weisen Sie nach, dass die Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass p die Nullstelle $x = -2$ besitzt.
b) Beweisen Sie, dass p keine weitere reelle Nullstelle besitzt.
c) Bestimmen Sie alle drei x-Werte, für die $p(x)$ den Wert 8 annimmt.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $p(x) \leq 8,\ x \in \mathbb{R}$.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder a_n $(n \in \mathbb{N})$ besitzt.

a) Es sei (a_n) eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von (a_n) gegen a an.

b) Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ gilt. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.

c) Sei (b_n) eine Folge mit $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (b_n) gegen 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.

d) Sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter die Folge (d_n) definiert durch

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = c_n \cdot d_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge (d_n) gegen Null konvergiert.

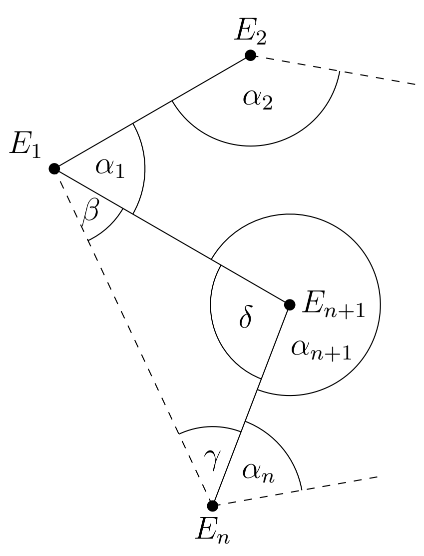
Hinweis: Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein einfaches n-Eck hat n verschiedene Eckpunkte $E_1, \ldots, E_n$, die durch Kanten verbunden sind. Außerdem schneiden sich die Kanten nicht, und für die Innenwinkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ an den Ecken gilt $\alpha_j \neq 0°, 180°, 360°$ für $j = 1, \ldots, n$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summe S_n der Innenwinkel in einem einfachen n-Eck mit $n \geq 3$ gilt: $S_n = (n-2) \cdot 180°$. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.
Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\alpha_{n+1} > 180°$ und $\alpha_{n+1} < 180°$. Verwenden Sie die in der jeweiligen Skizze eingezeichnete Hilfslinie.

Fall $\alpha_{n+1} > 180°$



Fall $\alpha_{n+1} < 180°$