Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\big(A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)\big) \;\Rightarrow\; B$$

für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Der Kommissar hat drei Tatverdächtige: Paula, Quentin und Ralf. Er weiß:

A) Wenn sich Quentin oder Ralf als Täter herausstellen, ist Paula unschuldig.
B) Ist aber Paula oder Ralf unschuldig, dann muss Quentin ein Täter sein.
C) Ist Ralf schuldig, so ist Paula Mittäterin.

Wer ist schuldig? Wer ist unschuldig?

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$\big(A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)\big) \;\Rightarrow\; B$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Der Beweis ist erbracht, da die letzte Spalte nur w enthält.

b) Im Folgenden bezeichne

P Paula ist schuldig,
Q Quentin ist schuldig,
R Ralf ist schuldig,

sodass die gegebenen Aussagen durch

$$(Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg P, \qquad (\neg P \vee \neg R) \;\Rightarrow\; Q, \qquad R \;\Rightarrow\; P$$

zusammengefasst werden können. Aus a) folgt

$$\big(\neg P \wedge (R \Rightarrow P)\big) \;\Rightarrow\; \neg R$$

und damit aus der ersten und der dritten Aussage

$$(Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg R.$$

Also wäre Ralf unschuldig, wenn er schuldig wäre. Da das ein Widerspruch ist, muß Ralf unschuldig sein. Mit der zweiten Aussage folgt dann, dass Quentin schuldig ist, und mit der ersten, dass Paula unschuldig ist.
Also sind Paula und Ralf unschuldig, während Quentin schuldig ist.

Alternative Lösung mit Hilfe einer Tabelle: P steht für Paula, Q für Quentin und R für Ralph.

Anhand der Tabelle können wir feststellen, in welchem Fall alle drei Aussagen A), B), C) wahr sind:

P	Q	R	A)	B)	C)	
s	s	s	f	w	w	
s	s	u	f	w	w	
s	u	s	f	w	w	
s	u	u	w	f	w	
u	s	s	w	w	f	
u	s	u	w	w	w	$\leftarrow$
u	u	s	w	f	f	
u	u	u	w	f	w	

Genau in einer Zeile sind alle drei Aussagen wahr. Also ist aufgrund der Aussagen eindeutig, wer schuldig und wer unschuldig ist: Paula und Ralph sind unschuldig und Quentin ist schuldig.

Aufgabe 2 (7 Punkte) Gegeben sei eine reelle Folge (a_n) und eine reelle Zahl a.

a) Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt.

b) Weisen Sie nach, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

c) Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen, und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

Ist (a_n) konvergent gegen a, dann konvergiert auch (b_n) gegen a.

d) Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n \;:=\; \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n).$$

Lösung:

a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \;=\; \frac{1}{n} \;<\; \frac{1}{N(\varepsilon)} \;<\; \varepsilon.$$

c) Subtrahiert man in der Ungleichung a_n, so folgt $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$ und insbesondere $|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$. Es folgt

$$|b_n - a| \;=\; |b_n - a_n + a_n - a| \;\leq\; |b_n - a_n| + |a_n - a| \;\leq\; \frac{1}{n} + |a_n - a|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n > N_1.$$

Wählt man nun ein N_2 mit $N_2 > \max\{N_1, \frac{2}{\varepsilon}\}$, so folgt

$$|b_n - a| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon,$$

und die Aussage ist gezeigt.

d) Es gilt mit $n^{-k} \to 0$ für $k \in \{1, 2, 4\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^{-2} + 5n^{-4}}{(1+3n^{-1})^2 \cdot (2-n^{-1})^2} \;=\; \frac{1}{4}$$

und

$$0 \;\le\; \frac{1+(-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n) \;\le\; \frac{1}{n}.$$

Mit

$$a_n \;:=\; \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2}$$

folgt

$$a_n \;\le b_n \;\le a_n + \frac{1}{n}$$

und unter Verwendung von c)

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) \;=\; |x+5| - |x+2| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$|x+5| - |x+2| \;=\; x+3.$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

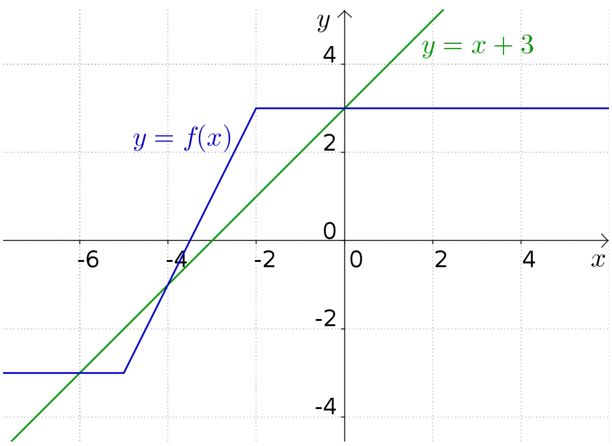
$$|x+5| - |x+2| \;\le\; x+3.$$

Lösung:

a) Die Terme in den Beträgen ändern ihr Vorzeichen bei $x = -5$ und $x = -2$. Fallunterscheidung ergibt

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -(x+5)+(x+2) & = & -3 & \text{für } x \le -5 \\ (x+5)+(x+2) & = & 2x+7 & \text{für } -5 < x \le -2 \\ (x+5)-(x+2) & = & 3 & \text{für } x \ge -2 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion zusammen mit der Geraden $y = x + 3$:



b) Wir unterscheiden drei Fälle.
Fall 1: $x \leq -5$. Dann ist die Gleichung äquivalent zu

$$-(x+5)+(x+2)=x+3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3=x+3,$$

also zu $x=-6$.
Fall 2: $-5 < x \leq -2$. In diesem Fall ist die Gleichung äquivalent zu

$$(x+5)+(x+2)=x+3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x+7=x+3,$$

also zu $x=-4$.
Fall 3: $x > -2$. In diesem Fall ist die Gleichung äquivalent zu

$$(x+5)-(x+2)=x+3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3=x+3,$$

also zu $x=0$.
Also ergibt sich als Lösungsmenge $\mathcal{L}=\{-6,-4,0\}$.

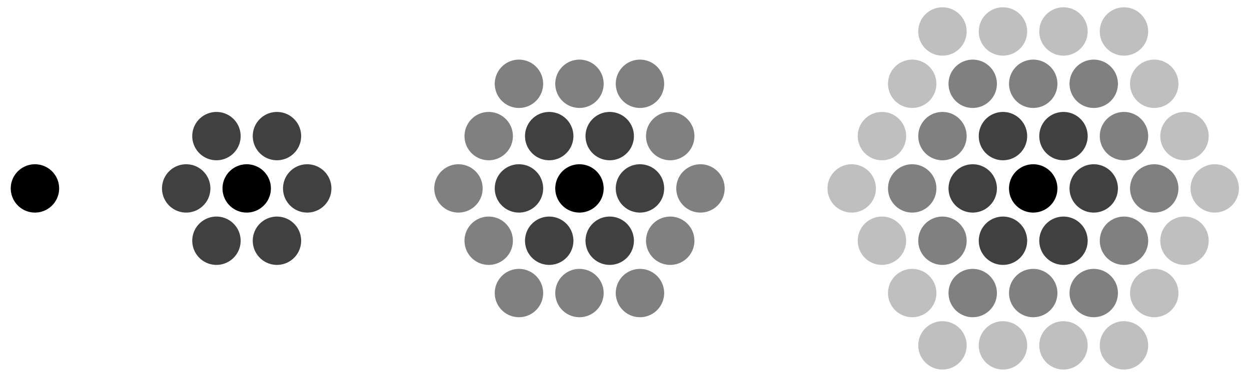
c) Aus den in b) berechneten x-Werten und der Skizze ergibt sich nun als Lösungsmenge

$$\mathcal{L}=[-6,-4]\cup[0,\infty).$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Sechseckszahlen H_n ($n=0,1,2,\ldots$). Wir betrachten dazu Anordnungen von Kreisen mit gleichem Radius, die schrittweise folgendermaßen erzeugt werden: Im Schritt 0 beginnen wir mit einem einzelnen Kreis, der im Schritt 1 wie unten skizziert durch Anlagerung von sechs weiteren Kreisen zu einer sechseckartigen Figur ergänzt wird. Nachfolgend wird im Schritt $n+1$ die Figur aus dem Schritt n durch eine weitere äußere Lage von Kreisen zu einer noch größeren sechseckartigen Figur ergänzt, wobei sich die Länge der äußeren Seiten um jeweils eine Kugel erhöht. Die Sechseckzahl H_n entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der so erzeugten Figur im Schritt n.

Schritt 0 Schritt 1 Schritt 2 Schritt 3



$H_0=1$ $H_1=7$ $H_2=19$ $H_3=37$

a) Drücken Sie H_{n+1} durch H_n aus ($n=0,1,2,\ldots$).

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Sechseckszahl die Gleichung

$$H_n=3n^2+3n+1$$

für $n\in\mathbb{N}$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Summe der Sechseckszahlen gerade die Kubikzahlen

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$$

liefert ($n\in\mathbb{N}$).
Hinweis: Sie dürfen die Formel aus Teil b) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Lösung:

a) Da das Sechseck mit $n+2$ Punkten je Seite genau $6n+6$ Punkte auf den Seiten hat, gilt
$$H_{n+1} = H_n + 6n + 6.$$

b) Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $H_1 = 7$ (siehe Skizze). Die Formel für $n = 1$ ergibt $H_1 = 3 + 3 + 1 = 7$. Also ist der Induktionsanfang bewiesen.
Alternativ kann die Induktion bei $n = 0$ begonnen werden: Für $n = 0$ besagt die zu beweisende Formel $H_0 = 1$, was laut Skizze richtig ist.

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage ist für ein n gezeigt. Dann gilt wegen a) und der Induktionsvoraussetzung
$$H_{n+1} = H_n + 6n + 6 = 3n^2 + 3n + 1 + 6n + 6 = 3n^2 + 9n + 7.$$
Setzt man in die zu beweisende Formel $n+1$ anstelle von n ein, so ergibt sich
$$H_{n+1} = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1 = 3n^2 + 9n + 7.$$
Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen, die Formel gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $H_0 = 1 = 1^3$.

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage ist für ein n gezeigt. Dann gilt wegen b) und der Induktionsvoraussetzung
$$\sum_{k=0}^{n} H_k = H_n + \sum_{k=0}^{n-1} H_k = 3n^2 + 3n + 1 + n^3 = (n+1)^3.$$
Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen, die Formel gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ kann die Summenformel für die Quadratzahlen bewiesen und die Gaußsche Summenformel verwendet werden.

Statistik zur Zertifikatsklausur 2016

Anzahl Teilnehmer: 1020

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 15,2 Punkte

Median: 15,0 Punkte