Zertifikatsklausur **7.10.2016**

Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Hinweis: Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder a_n $(n \in \mathbb{N})$ besitzt.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage

$$\big(A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)\big) \;\Rightarrow\; B$$

für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Der Kommissar hat drei Tatverdächtige: Paula, Quentin und Ralf. Er weiß:

A) Wenn sich Quentin oder Ralf als Täter herausstellen, ist Paula unschuldig.
B) Ist aber Paula oder Ralf unschuldig, dann muss Quentin ein Täter sein.
C) Ist Ralf schuldig, so ist Paula Mittäterin.

Wer ist schuldig? Wer ist unschuldig?

Aufgabe 2 (7 Punkte) Gegeben sei eine reelle Folge (a_n) und eine reelle Zahl a.

a) Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt.

b) Weisen Sie nach, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

c) Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen, und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

Ist (a_n) konvergent gegen a, dann konvergiert auch (b_n) gegen a.

d) Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n \;:=\; \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n).$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) \;=\; |x+5| - |x+2| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$|x+5| - |x+2| \;=\; x+3.$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

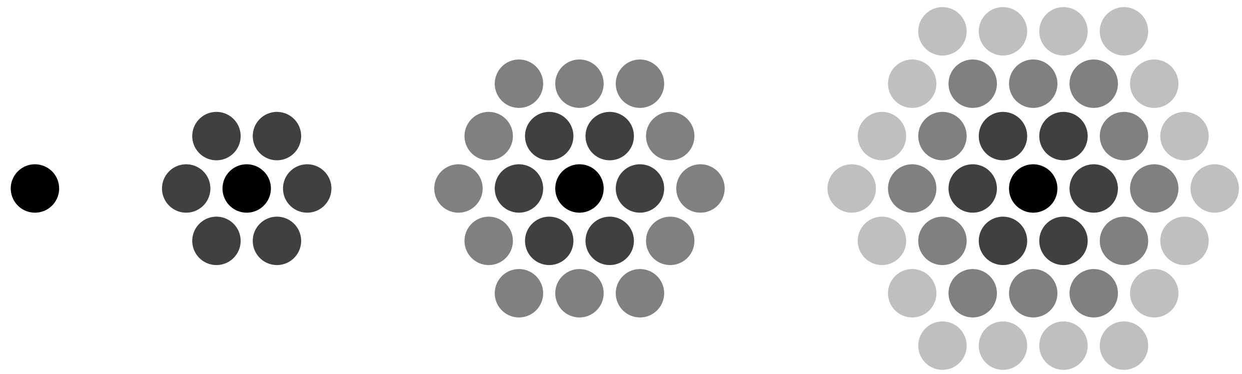
$$|x+5| - |x+2| \;\leq\; x+3.$$

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 4 (7 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Sechseckszahlen H_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Wir betrachten dazu Anordnungen von Kreisen mit gleichem Radius, die schrittweise folgendermaßen erzeugt werden: Im Schritt 0 beginnen wir mit einem einzelnen Kreis, der im Schritt 1 wie unten skizziert durch Anlagerung von sechs weiteren Kreisen zu einer sechseckartigen Figur ergänzt wird. Nachfolgend wird im Schritt $n + 1$ die Figur aus dem Schritt n durch eine weitere äußere Lage von Kreisen zu einer noch größeren sechseckartigen Figur ergänzt, wobei sich die Länge der äußeren Seiten um jeweils eine Kugel erhöht. Die Sechseckzahl H_n entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der so erzeugten Figur im Schritt n.

Schritt 0 Schritt 1 Schritt 2 Schritt 3



$H_0 = 1$ $H_1 = 7$ $H_2 = 19$ $H_3 = 37$

a) Drücken Sie H_{n+1} durch H_n aus ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Sechseckszahl die Gleichung

$$H_n = 3n^2 + 3n + 1$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Summe der Sechseckszahlen gerade die Kubikzahlen

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$$

liefert ($n \in \mathbb{N}$).

Hinweis: Sie dürfen die Formel aus Teil b) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.