Vertiefungskurs Mathematik

Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 07.10.2016

AUFGABE 1

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

A	B	¬B	¬A	¬B → ¬A	A ∧ (¬B → ¬A)	(A ∧ (¬B → ¬A)) → B
w	w	f	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Somit liegt eine Tautologie vor.

b) Aus (A) und (C) folgt, dass Ralf unschuldig ist. Denn wäre Ralf schuldig, dann folgt aus (C), dass auch Paula schuldig ist. Dagegen folgt aus (A), dass Paula unschuldig ist. Also ergibt die Annahme, Ralf wäre schuldig, ein Widerspruch.

Da Ralf unschuldig ist, folgt aus (B), dass Quentin schuldig ist.

Daraus folgt mit (A), dass Paula unschuldig ist.

Ergebnis: Quentin ist schuldig, Ralf und Paula sind unschuldig.

AUFGABE 2

a) (a_n) konvergiert gegen a, genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert mit: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$.

b) Es ist $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Es gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ genau dann, wenn $\frac{1}{\varepsilon} < n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$: $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Somit ist 0 der Grenzwert der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Aus $a_n \leq b_n$ folgt $b_n - a_n \geq 0$. Aus $b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ folgt $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$. (*)
Es ist $|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| = |(b_n - a_n) + (a_n - a)|$.
Mit der Dreiecksungleichung und (*) folgt:
$|(b_n - a_n) + (a_n - a)| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq \frac{1}{n} + |a_n - a|$ (**)
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ nach b) eine Nullfolge ist, existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ gilt: $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. (***)
Da (a_n) nach Voraussetzung gegen a konvergiert, existiert $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_2$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. (****)

n_0 ist die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2. Dann gilt nach (**), (***) und (****) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $|b_n - a| \leq \frac{1}{n} + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Folglich konvergiert (b_n) gegen a.

d) Es ist $\frac{n^4-n^2+5}{(n+3)^2\cdot(2n-1)^2} = \frac{\frac{n^4}{n^4}-\frac{n^2}{n^4}+\frac{5}{n^4}}{(n+3)^2\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(2n-1)^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\left(\frac{n}{n}+\frac{3}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}$ für $n \neq 0$.
Für $n \to \infty$ gilt also mit den Grenzwertsätzen: $\frac{n^4-n^2+5}{(n+3)^2\cdot(2n-1)^2} \to \frac{1}{1^2\cdot 2^2} = \frac{1}{4}$.
Wenn n gerade ist, ist $\frac{1+(-1)^n}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. Da $0 \leq (\sin(n))^2 \leq 1$ folgt
$0 \leq \frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 \leq \frac{1}{n}$.
Wenn n ungerade ist, ist $\frac{1+(-1)^n}{2n} = \frac{1-1}{2n} = 0$. Damit ist $\frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 = 0$ und somit auch $0 \leq \frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 \leq \frac{1}{n}$.
Also gilt immer $0 \leq \frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 \leq \frac{1}{n}$ und wenn man $a_n = 0$ und $c_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2$ setzt, ist $a_n \leq c_n \leq a_n + \frac{1}{n}$.
Damit folgt aus c): $\frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 \to 0$ für $n \to \infty$.
Insgesamt gilt mit dem Grenzwertsatz für die Summe:
$b_n = \frac{n^4-n^2+5}{(n+3)^2\cdot(2n-1)^2}\cdot\frac{1+(-1)^n}{2n}\cdot(\sin(n))^2 \to \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$ für $n \to \infty$.

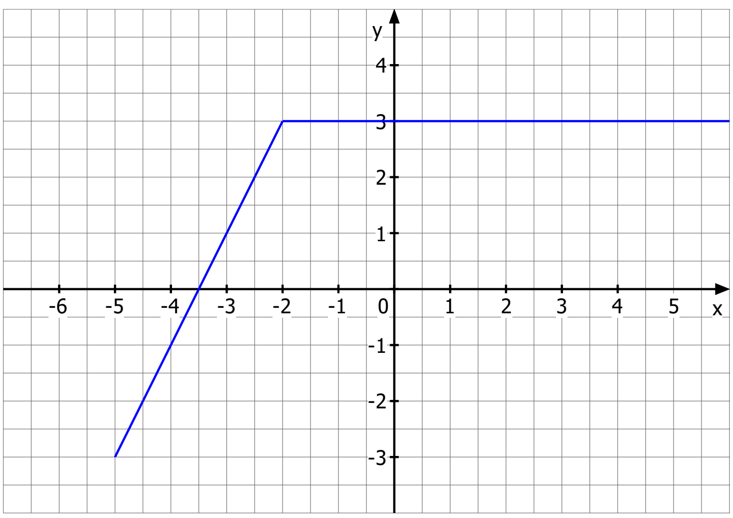
AUFGABE 3

a) 1. Fall: $x \geq -2$: Dann ist $|x+5| = x+5$ und $|x+2| = x+2$.
Also ist $f(x) = x+5-(x+2) = x+5-x-2 = 3$.

2. Fall: $-5 < x < -2$: Dann ist $|x+5| = x+5$ und $|x+2| = -x-2$.
Also ist $f(x) = x+5-(-x-2) = x+5+x+2 = 2x+7$.

3. Fall: $x \leq -5$: Dann ist $|x+5| = -x-5$ und $|x+2| = -x-2$.
Also ist $f(x) = -x-5-(-x-2) = -x-5+x+2 = -3$.

Somit ergibt sich der folgende Graph.



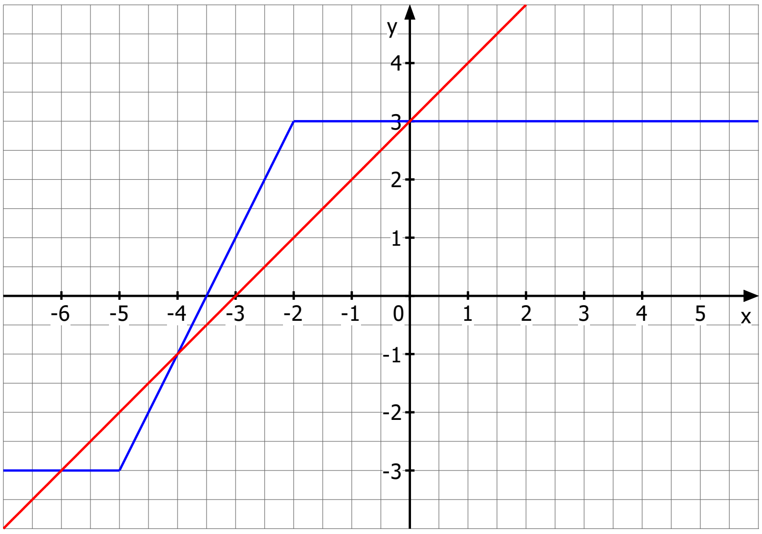
b) <u>1. Möglichkeit: rechnerisch:</u>
Man betrachtet dieselben Fälle wie in a)

1. Fall: $x \geq -2$: Dann ist $|x+5| - |x+2| = 3$.
Die Gleichung $3 = x + 3$ hat die Lösung $x_1 = 0$.

2. Fall: $-5 < x < -2$: Dann ist $|x+5| - |x+2| = 2x + 7$.
Die Gleichung $2x + 7 = x + 3$ hat die Lösung $x_2 = -4$.

3. Fall: $x \leq -5$: Dann ist $|x+5| - |x+2| = -3$. Die Gleichung $-3 = x + 3$ hat die Lösung $x_3 = -6$.

<u>2. Möglichkeit: zeichnerisch:</u>
Einzeichnen der Geraden mit der Gleichung $y = x + 3$



Die x-Werte der Schnittpunkte sind abgelesen: $x_1 \approx 0; x_2 \approx -4$ und $x_3 \approx -6$.
Durch Einsetzen erkennt man, dass diese Werte exakt sind:
$f(0) = 3 = 0 + 3\,;\;\; f(-4) = -1 = -4 + 3\,;\;\; f(-6) = -3 = -6 + 3$.
Da es sich bei dem Graphen von $y = x + 3$ um eine Gerade handelt, gibt es keine weiteren Schnittpunkte außerhalb des gezeichneten Bereichs.

Somit sind die Lösungen der Gleichung $x_1 \approx 0; x_2 \approx -4$ und $x_3 \approx -6$.

c) Die Schnittstellen zwischen dem Graphen von f und der Geraden sind nach b) $x_1 \approx 0; x_2 \approx -4$ und $x_3 \approx -6$. Man erkennt an der Zeichnung, dass der Graph von f unterhalb oder auf der Geraden verläuft in den Intervallen: $[-6;\ -4]$ und $[0;\ \infty)$. Damit ist die Lösungsmenge der Gleichung: $\mathbb{L} = [-6;\ -4] \cup [0;\ \infty)$.

AUFGABE 4

a) Eine äußere Seite der Figur in Schritt n hat $n + 1$ Kreise. Eine äußere Seite der Figur in Schritt $n + 1$ hat also $n + 2$ Kreise. Von Schritt n auf Schritt $n + 1$ kommen 6 Seiten dazu. Die Anzahl der hinzukommenden Kreise ist jedoch kleiner als $6 \cdot (n + 2)$. Denn benachbarte äußere Seiten haben einen Kreis gemeinsam. Somit werden bei dem Term $6 \cdot (n + 2)$ genau 6 Kreise doppelt gezählt.

Von Schritt n auf Schritt $n+1$ kommen also $6 \cdot (n+2) - 6 = 6n + 6$ Kreise hinzu und es gilt: $H_{n+1} = H_n + 6n + 6$.

b) zu zeigen: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $H_n = 3n^2 + 3n + 1$.
Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 0$: Es ist $H_0 = 1$ und $3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$. Also gilt die Formel für $n = 0$.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für n.
Induktionsvoraussetzung (IV): $H_n = 3n^2 + 3n + 1$.
Zu zeigen ist, dass die Formel dann auch für $n+1$ gilt:
Es gilt $3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = 3(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) + 1$
$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1$.

Nach a) ist $H_{n+1} = H_n + 6n + 6$.
Mit der IV folgt $H_{n+1} = H_n + 6n + 6 = 3n^2 + 3n + 1 + 6n + 6$
$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1 = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$.
Somit gilt die Formel auch für $n+1$.
Induktionsschluss: Damit ist die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. □

c) zu zeigen: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$$

(Für $n = 0$ ist die Formel nicht sinnvoll. Zwar ist die leere Summe als 0 definiert und somit wäre die Formel auch dann korrekt. Aber …)
Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $\sum_{k=0}^{1-1} H_k = H_0 = 1$ und $1^3 = 1$. Also gilt die Formel für $n = 1$.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für n.
Induktionsvoraussetzung (IV): $\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$.
Zu zeigen ist, dass die Formel dann auch für $n+1$ gilt:
Es ist $\sum_{k=0}^{(n+1)-1} H_k = \sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{k=0}^{n-1} H_k + H_n$. Mit der IV und b) ergibt sich:
$\sum_{k=0}^{n-1} H_k + H_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Außerdem ist $(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)(n^2 + 2n + 1)$
$= n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Damit ergibt sich $\sum_{k=0}^{(n+1)-1} H_k = (n+1)^3$. Somit gilt die Formel auch für $n+1$.
Induktionsschluss: Damit ist die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ bewiesen. □