Erwartungshorizont

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Aussage

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Kommissar **K** atmet auf, sein Fall ist vollständig geklärt. Dabei hatte er vier Verdächtige — nennen wir sie **P**, **Q**, **R** und **S**. **P** spielt eine wichtige Rolle. Ist er unschuldig, dann ist auch **Q** außer Verdacht und **R** mit Sicherheit schuldig. Auch **S** ist eine Schlüsselfigur. Ist er unschuldig, dann war **Q** bei den Tätern; ist er hingegen schuldig, dann ist auch **R** bei den Tätern. Aber **R** besitzt ein einwandfreies Alibi.
Wer wird verhaftet? Wer ist unschuldig?

Lösung:

a) Der Beweis ergibt sich aus folgender Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	f	w

Da die letzte Spalte nur w enthält, ist der Beweis erbracht.

b) Verwendet man die Abkürzung P für P ist schuldig und entsprechend für Q, R und S, so ergeben die Aussagen des Textes

(i) $\neg P \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge R$,
(ii) $\neg S \;\Rightarrow\; Q$,
(iii) $S \;\Rightarrow\; R$.
(iv) R ist falsch.

Da R nach (iv) falsch ist, folgt aus (iii), dass S falsch ist (Kontraposition auf (iii) angewandt: $\neg R \;\Rightarrow\; \neg S$).
Da $\neg S$ wahr ist, folgt aus (ii), dass Q wahr ist.
Da $\neg Q$ falsch ist, ist auch $\neg Q \wedge R$ falsch, und aus (i) folgt, dass P wahr ist (Kontraposition auf (i) angewandt: $\neg(\neg Q \wedge R) \;\Rightarrow\; P$, da $\neg(\neg P) \;\Leftrightarrow\; P$).

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Geben Sie die Definition für die Beschränktheit einer Folge an.

b) Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Gegeben ist der Satz:

Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. $(*)$

b$_1$) Geben Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.

b$_2$) Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes.

b$_3$) Ist die Umkehrung des Satzes wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

b$_4$) Beweisen Sie den Satz $(*)$.

Lösung:

a) Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt, sodass $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) **b$_1$)** Voraussetzung: (a_n) ist Nullfolge und (b_n) ist beschränkt.
Behauptung: $(a_n \cdot b_n)$ ist Nullfolge

b$_2$) Ist $(a_n \cdot b_n)$ Nullfolge, dann ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) ist beschränkt.

b$_3$) Nein. Gegenbeispiele sind z.B.:
$a_n = 1$ und $b_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ oder $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

b$_4$) Da (b_n) beschränkt ist, gilt $|b_n| \le M$ für $n \in \mathbb{N}$. Hierbei soll $M > 0$ gewählt sein.
Da (a_n) Nullfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε, so dass für $n > N_\varepsilon$ stets $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ gilt.
Für $n > N_\varepsilon$ folgt nun

$$|a_n \cdot b_n| \;=\; |a_n| \cdot |b_n| \;\le\; |a_n| \cdot M \;<\; \frac{\varepsilon}{M} M \;=\; \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

b) Zeigen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen, dass die angegebenen Folgen konvergieren, und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

b₁) $a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{2n-1} \cdot \dfrac{2n^3+3n^2+5}{3n^4+2n^3+n^2+2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

b₂) $b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+5n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Lösung:

a) Induktionsanfang: Es gilt für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

Induktionsbehauptung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \underset{\text{voraussetzung}}{\overset{\text{Induktions-}}{=}} \frac{n+1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$= 2 + \frac{n+1-2(n+2)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Daraus folgt, dass die Behauptung für alle natürlichen n gilt.

b) **b₁)** Es gilt

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)(2n^3+3n^2+5)}{(2n-1)(3n^4+2n^3+n^2+2)} \cdot \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)}$$

Wegen $1/n \to 0$ und damit $1/n^2 \to 0$, $1/n^3 \to 0$, $1/n^4 \to 0$ folgen aus den Sätzen über die Addition und Multiplikation konvergenter Folgen für Zähler bzw. Nenner

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right) \overset{n\to\infty}{\to} 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2,$$

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right) \overset{n\to\infty}{\to} 2 \cdot 3 = 6 \neq 0.$$

Der Satz über den Grenzwert von Quotienten konvergenter Folgen ergibt

$$a_n \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{für } n \to \infty.$$

b₂) Es gilt wiederum unter Ausnutzung von $1/n \to 0$

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+5n} = \frac{n^2+n+1-n^2-5n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+5n}} = \frac{1-4n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+5n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= -\frac{4-1/n}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1+5/n}} \to -\frac{4}{1+1} = -2.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

a) $x^3 - 9x \leq x^3 + x^2 - 5x + 2$,

b) $\dfrac{3x-5}{(x+1)(x-2)} \leq 1$.

Lösung:

a) Durch äquivalentes Umformen erhält man

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x \leq x^3 + x^2 - 5x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -9x \leq x^2 - 5x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

Da die Nullstellen von $x^2 + 4x + 2$ durch $-2 \pm \sqrt{4+2} = -2 \pm \sqrt{2}$ gegeben sind und der höchste Koeffizient positiv ist, ergibt sich als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x : x \leq -2 - \sqrt{2} \ \vee \ x \geq -2 + \sqrt{2}\} = (-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}, \infty)$$

b) Beachte $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$.

Fall 1: $-1 < x < 2$. In diesem Fall ist der Nenner negativ. Äquivalentes Umformen ergibt

$$\frac{3x-5}{x^2-x-2} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ 3x - 5 \geq x^2 - x - 2 \ \Leftrightarrow \ 0 \geq x^2 - 4x + 3.$$

Das Polyonom $p(x) = x^2 - 4x + 3$ hat die Nullstellen $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$. Da der Koeffizient vor x^2 positiv ist, gilt

$$0 \leq x^2 - 4x + 3 \ \Leftrightarrow \ 1 \leq x \leq 3.$$

Zusammen mit der Bedingung $-1 < x < 2$ ergibt sich in diesem Fall als Lösungsmenge $L_1 = \{x : 1 \leq x < 2\} = [1, 2)$.

Fall 2: $x < -1 \ \vee \ x > 2$: In diesem Fall ist der Nenner positiv. Äquivalentes Umformen ergibt

$$\frac{3x-5}{x^2-x-2} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ 3x - 5 \leq x^2 - x - 2 \ \Leftrightarrow \ 0 \leq x^2 - 4x + 3 \ \overset{\text{siehe Fall 1}}{\Leftrightarrow} \ x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3.$$

Zusammen mit der Bedingung $x < -1 \ \vee \ x > 2$ ergibt sich in diesem Fall als Lösungsmenge $L_2 = \{x : x < -1 \ \vee x \geq 3\} = (-\infty, -1) \cup [3, \infty)$.

Die Lösungsmenge ist nun die Vereinigung beider Mengen:

$$\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup [1, 2) \cup [3, \infty).$$

Statistik zur Zertifikatsklausur 2015

Anzahl Teilnehmer: 729

Maximal erreichbar: 28 Punkte

Durchschnitt: 15,8 Punkte