Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Alle vier Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Hinweis: Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder a_n $(n \in \mathbb{N})$ besitzt.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Aussage

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge \neg B)$$

für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Kommissar **K** atmet auf, sein Fall ist vollständig geklärt. Dabei hatte er vier Verdächtige — nennen wir sie **P**, **Q**, **R** und **S**. **P** spielt eine wichtige Rolle. Ist er unschuldig, dann ist auch **Q** außer Verdacht und **R** mit Sicherheit schuldig. Auch **S** ist eine Schlüsselfigur. Ist er unschuldig, dann war **Q** bei den Tätern; ist er hingegen schuldig, dann ist auch **R** bei den Tätern. Aber **R** besitzt ein einwandfreies Alibi.
Wer wird verhaftet? Wer ist unschuldig?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Geben Sie die Definition für die Beschränktheit einer Folge an.

b) Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Gegeben ist der Satz:

Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. $(*)$

b₁) Geben Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.

b₂) Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes.

b₃) Ist die Umkehrung des Satzes wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

b₄) Beweisen Sie den Satz $(*)$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \;=\; 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

b) Zeigen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen, dass die angegebenen Folgen konvergieren, und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

b₁) $a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{2n-1} \cdot \dfrac{2n^3+3n^2+5}{3n^4+2n^3+n^2+2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

b₂) $b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+5n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

a) $x^3 - 9x \le x^3 + x^2 - 5x + 2$,

b) $\dfrac{3x-5}{(x+1)(x-2)} \;\le\; 1.$