Aufgabe 1: (2 Punkte)

Gib eine explizite Darstellung der Folge (a_n) (mit $n \geq 0$) an.

a) $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = 5 \cdot a_n$ b) $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = -a_n$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Gib eine rekursive Darstellung der Folge (a_n) (mit $n \geq 0$) an.

a) $a_n = 4n + 3$ b) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Gib die Definition dafür an, dass eine Folge nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Untersuche die Folge (a_n) (mit $n \geq 1$) auf Monotonie und Beschränktheit. Begründe dein Ergebnis.

a) $a_n = n^4$ b) $a_n = (-5)^n$ c) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

Aufgabe 5: (1 Punkt)

Die folgenden Aussage ist falsch. Gib ein Gegenbeispiel an.

Jede beschränkte Folge hat einen Grenzwert.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Beweise, dass die Folge (a_n) (mit $n \geq 1$) den angegebenen Grenzwert hat.

Gib außerdem zu $\varepsilon = 10^{-4}$ explizit ein n_0 an.

a) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$, Grenzwert: 3 b) $a_n = \frac{5n+1}{n-1}$, Grenzwert: 5

Aufgabe 7: (1 Punkt)

Begründe, warum die Folge (a_n) (mit $n \geq 0$) keinen Grenzwert hat.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ für n gerade} \\ 1 & , \text{ für n ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 8: (3 Punkte)
a) Gib zum folgenden Beweis an, um welches Beweisverfahren es sich handelt.
b) Vervollständige den Beweis.

Satz: Sei x eine rationale Zahl und y eine irrationale Zahl.
Dann ist die Zahl $x \cdot y$ irrational.
Beweis: Angenommen $x \cdot y$ ist rational.
Dann existieren ganze Zahlen a und b mit $x \cdot y = \frac{a}{b}$ und $b \neq 0$.
Da x rational ist, existieren …

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Beweise die folgende Aussage:
Seien a und b zwei natürliche Zahlen, wobei weder a noch b durch 3 teilbar sind.
Dann ist eine der Zahlen $a + b$ und $a - b$ auch nicht durch 3 teilbar.
Hinweis: Führe eine Fallunterscheidung nach dem Rest modulo 3 durch.

Viel Erfolg!