Warten auf ein Muster bei Bernoulli-Versuchen – Erarbeitung – Lösungen

a) individuelle Schätzungen

b) **Warten auf den ersten Doppeltreffer**

$P(A_1) = 1 - p$, $P(A_2) = p \cdot (1 - p)$ und $P(A_3) = p^2$.

- $E_{A_1}(X) = 1 + E(X)$, denn wenn A_1 eintritt, so bleibt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer im Startzustand. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um eins.
- $E_{A_2}(X) = 2 + E(X)$, denn wenn A_2 eintritt, so fällt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer nach zwei Versuchen wieder in den Startzustand zurück. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um zwei.
- $E_{A_3}(X) = 2$, denn wenn A_3 eintritt, dann sind die ersten beiden Versuche Treffer und nach zwei Versuchen ist der Doppeltreffer bereits aufgetreten.

Damit ergibt die Formel vom totalen Erwartungswert

$E(X) = E_{A_1}(X) \cdot P(A_1) + E_{A_2}(X) \cdot P(A_2) + E_{A_3}(X) \cdot P(A_3)$

$= \big(1 + E(X)\big) \cdot (1 - p) + \big(2 + E(X)\big) \cdot p \cdot (1 - p) + 2p^2$

$= 1 - p + E(X) - E(X)p + 2p(1 - p) + E(X)p(1 - p) + 2p^2$

$= 1 - p + E(X) - E(X)p + 2p - 2p^2 + \mathrm{E}(X)p - E(X)p^2 + 2p^2$

$= 1 + p + E(X)1 - E(X)p^2$

Aufgelöst nach $E(X)$ erhält man $E(X) - E(X) + E(X) \cdot p^2 = 1 + p$ und daraus $E(X) = \frac{1+p}{p^2}$.

c) **Warten auf den ersten Tripeltreffer**

$P(A_1) = 1 - p$, $P(A_2) = p \cdot (1 - p)$, $P(A_3) = p^2 \cdot (1 - p)$ und

$P(A_4) = p^3$.

Außerdem ist:

- $E_{A_1}(X) = 1 + E(X)$, denn wenn A_1 eintritt, so bleibt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer im Startzustand. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um eins.

- $E_{A_2}(X) = 2 + E(X)$, denn wenn A_2 eintritt, so fällt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer nach zwei Versuchen wieder in den Startzustand zurück. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um zwei.
- $E_{A_3}(X) = 3 + E(X)$, denn wenn A_3 eintritt, so fällt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer nach drei Versuchen wieder in den Startzustand zurück. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um drei.
- $E_{A_4}(X) = 3$, denn wenn A_4 eintritt, dann sind die ersten drei Versuche Treffer und nach drei Versuchen ist der Doppeltreffer bereits aufgetreten.

Damit ergibt die Formel vom totalen Erwartungswert

$$\begin{aligned}
&E(X) \\
&= E_{A_1}(X) \cdot P(A_1) + E_{A_2}(X) \cdot P(A_2) + E_{A_3}(X) \cdot P(A_3) + E_{A_4}(X) \cdot P(A_4) \\
&= \big(1 + E(X)\big) \cdot (1 - p) + \big(2 + E(X)\big) \cdot p \cdot (1 - p) \\
&\qquad\qquad + \big(3 + E(X)\big) \cdot p^2 \cdot (1 - p) + 3p^3 \\
&= 1 + E(X) - p - E(X)p + 2p + E(X)p - 2p^2 - E(X)p^2 + 3p^2 \\
&\qquad\qquad + E(X)p^2 - 3p^3 - E(X)p^3 + 3p^3 \\
&= 1 + E(X) + p + p^2 - E(X)p^3
\end{aligned}$$

Aufgelöst nach $E(X)$ erhält man $p^3 E(X) = 1 + p + p^2$ und daraus

$$E(X) = \frac{1 + p + p^2}{p^3}.$$

Warten auf ein Muster bei Bernoulli-Versuchen – Aufgaben

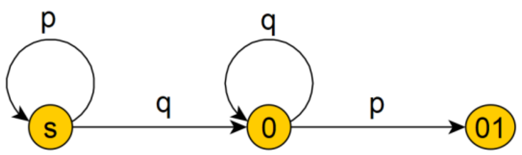
1. X zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten Doppel-Sechs. Dann ist nach Erarbeitung b) $E(X) = \frac{1+\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 42$.

   Y zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten Tripel-Sechs. Dann ist nach Erarbeitung c) $E(Y) = \frac{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}}{\left(\frac{1}{6}\right)^3} = 258$.

   Vergleich mit individueller Schätzung

2. Betrachtet werden die beiden Ereignisse
   A_1: Der erste Versuch hat das Ergebnis 0.
   A_2: Der erste Versuch hat das Ergebnis 1.
   Dann ist $P(A_1) = 1 - p$, $P(A_2) = p$, $E_{A_1}(X) = 1 + E(X)$ [denn wenn A_1 eintritt, so bleibt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Treffer im Startzustand. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um eins] und $E_{A_2}(X) = 1$ [denn wenn A_2 eintritt, tritt der erste Treffer ein].
   Also ergibt die Formel vom totalen Erwartungswert
   $E(X) = (1-p) \cdot \big(1 + E(X)\big) + p = 1 + E(X) - p - pE(X) + p$, dies führt auf $pE(X) = 1$ und somit auf $E(X) = \frac{1}{p}$.

3. a)



   b) $P(A_1) = p$, $P(A_2) = 1 - p$, $E_{A_1}(X) = 1 + E(X)$ [denn wenn A_1 eintritt, so bleibt man in Bezug auf das Warten auf das Muster 01 im Startzustand. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um eins]
   $E_{A_2}(X) = 1 + \frac{1}{p}$, denn wenn der erste Versuch das Ergebnis 0 hat, so wartet man nun auf den ersten Treffer, die Wartezeit auf den ersten

Treffer ist geometrisch verteilt mit Parameter p, somit ist der zugehörige Erwartungswert $\frac{1}{p}$.

c) Nach der Formel vom totalen Erwartungswert ist

$$E(X) = E_{A_1}(X) \cdot P(A_1) + E_{A_2}(X) \cdot P(A_2)$$

$$= \big(1 + E(X)\big) \cdot p + \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot (1 - p)$$

$$= p + p \cdot E(X) + 1 - p + \frac{1}{p} - 1$$

$$= p \cdot E(X) + \frac{1}{p}$$

Daraus ergibt sich $E(X) = \frac{1}{p \cdot (1-p)}$.

d) Man wählt 1 für Zahl und 0 für Wappen.

X zählt die Anzahl der Münzwürfe bis zum Muster 11.

Dann ist $E(X) = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6$ nach Erarbeitung b)

Y zählt die Anzahl der Münzwürfe bis zum Muster 01.

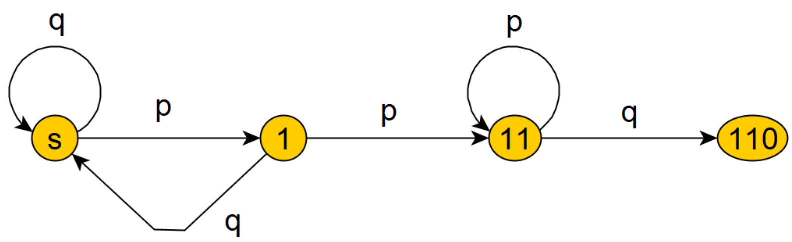
Dann ist $E(Y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$ nach Teilaufgabe c).

Bei Betrachtung der Zustandsgraphen fällt auf, dass beim Warten auf 11 man vom Zustand „1“ wieder in den Startzustand zurückfallen kann. Dagegen kann man beim Warten auf 01 nicht vom Zustand „0“ in den Startzustand zurückfallen. Insofern ist plausibel, dass der Erwartungswert für die Wartezeit im zweiten Fall deutlich geringer ist.

e) Es muss gelten $\frac{1+p}{p^2} = \frac{1}{p \cdot (1-p)}$. Dies führt auf die Gleichung $p^2 + p - 1 = 0$, deren Lösungen $p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sind. Da $0 \leq p \leq 1$ gelten muss, ist die einzige Lösung $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Dies bedeutet, dass p das Intervall $[0; 1]$ im goldenen Schnitt teilt.

4. Man vertauscht Treffer und Niete. Damit erhält man eine Folge von Bernoulli-Versuchen mit Trefferwahrscheinlichkeit $1 - p$ und es wird der Erwartungswert für das Muster 01 bestimmt. Dieser ist nach Aufgabe 3 gerade $E(X) = \frac{1}{(1-p) \cdot (1-(1-p))} = \frac{1}{(1-p) \cdot p}$.

5. Zustandsgraph



X zählt die Anzahl der Versuche bis zum Auftreten des Musters 110.
Betrachtet werden die Ereignisse
A_1: Der erste Versuch hat das Ergebnis 0.
A_2: Die ersten beiden Versuchs haben das Ergebnis 10.
A_3: Die ersten beiden Versuchs haben das Ergebnis 11.
Es ist $P(A_1) = 1 - p$, $P(A_2) = p \cdot (1-p)$ und $P(A_3) = p^2$.
Außerdem ist

- $E_{A_1}(X) = 1 + E(X)$, denn wenn A_1 eintritt, so bleibt man in Bezug auf das Warten auf 110 im Startzustand. Somit erhöht sich das Warten um eins.
- $E_{A_2}(X) = 2 + E(X)$, denn wenn A_2 eintritt, so fällt man in Bezug auf das Warten auf den ersten Doppeltreffer nach zwei Versuchen wieder in den Startzustand zurück. Somit erhöht sich die Wartezeit (gemessen an der Anzahl der Versuche) um zwei.
- $E_{A_3}(X) = 2 + \frac{1}{1-p}$ denn wenn A_3 eintritt, so haben die ersten beiden Versuche das Ergebnis 11 und man wartet nun auf 0. Die Wartezeit auf 0 ist geometrisch verteilt mit Parameter $1-p$, der zugehörige Erwartungswert ist $\frac{1}{1-p}$

Nach der Formel vom totalen Erwartungswert ist
$E(X) = E_{A_1}(X) \cdot P(A_1) + E_{A_2}(X) \cdot P(A_2) + E_{A_3}(X) \cdot P(A_3)$

$$= (1 + E(X)) \cdot (1-p) + \big(2 + E(X)\big) \cdot p \cdot (1-p) + \left(2 + \frac{1}{1-p}\right) \cdot p^2$$

$$= 1 + E(X) - p - p \cdot E(X) + 2p - 2p^2 + p \cdot E(X) - p^2 \cdot E(X) + 2p^2 + \frac{p^2}{1-p}$$

$$= 1 + E(X) + p - p^2 \cdot E(X) + \frac{p^2}{1-p}$$

Dies führt auf $p^2 \cdot E(X) = 1 + p + \frac{p^2}{1-p} = \frac{1-p+p(1-p)+p^2}{1-p} = \frac{1}{1-p}$ und damit auf $E(X) = \frac{1}{p^2 \cdot (1-p)}$.