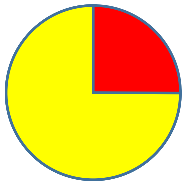
Formel vom totalen Erwartungswert – Erarbeitung



Vorüberlegung: Das nebenstehende Glücksrad wird zweimal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „rot“ erscheint. A ist das Ereignis, dass beim ersten Drehen „rot“ erscheint.

Es ist $P(X = 1) =$ ____________________, $P(A) =$ _______ und $P(\bar{A}) =$ _______.

Also ist $P_A(X = 1) =$ ______________ und $P_{\bar{A}}(X = 1) =$ ______________.

Wenn man diese beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit, dass ihre „Bedingung“ eintritt, multipliziert und diese Produkte addiert, erhält man ____.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein. Man kann ihn benützen, um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu berechnen, indem man es in Teilereignisse zerlegt, deren Wahrscheinlichkeiten einfach zu bestimmen sind. Oben wurde die Ergebnismenge in zwei Teilereignisse (A und $\overline{A}$) aufgeteilt, man kann sie jedoch auch in mehr als zwei paarweise disjunkte Teilereignisse $A_1, A_2, \dots, A_k$ mit $\sum_{j=1}^{k} P(A_j) = 1$ aufteilen. Dabei müssen diese alle positive Wahrscheinlichkeiten haben, damit die bedingten Wahrscheinlichkeiten definiert sind. Man erhält den

Satz (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit): Sind $A_1, A_2, \dots, A_k$ (für $k \geq 2$) paarweise disjunkte Ereignisse, wobei $P(A_j) > 0$ für $1 \leq j \leq k$ und $\sum_{j=1}^{k} P(A_j) = 1$ gelten, dann gilt für jedes Ereignis B

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j) \ .$$

Beweis:

(1) Begründen Sie, dass $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$ ist.

(2) Begründen Sie, dass die $B \cap A_j$ paarweise disjunkt sind.

(3) Begründen Sie mithilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass $P_{A_j}(B) \cdot P(A_j) = P(B \cap A_j)$ ist.

(4) Wegen (1) und (2) ist $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j)$.

(5) Wegen (3) ist $\sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)$. □

Fortsetzung der Vorüberlegung: Im oben betrachteten Zufallsexperiment gilt:

$E(X) =$ ________________________

$E_A(X) =$ ________________________

$E_{\bar{A}}(X) =$ ________________________

x	0	1	2
$P(X = x)$			
$P_A(X = x)$			
$P_{\bar{A}}(X = x)$			

Wenn man diese beiden bedingten Erwartungswerte jeweils mit der Wahrscheinlichkeit, dass ihre „Bedingung“ eintritt, multipliziert und diese Produkte addiert, erhält man ____.

Auch dieser Zusammenhang gilt allgemein:

Satz (Formel vom totalen Erwartungswert): Sind $A_1, A_2, \dots, A_k$ (für $k \geq 2$) paarweise disjunkte Ereignisse, wobei $P\left(A_j\right) > 0$ für $1 \leq j \leq k$ und $\sum_{j=1}^{k} P(A_j) = 1$ gelten, dann gilt für jede Zufallsgröße X

$$E(X) = \sum_{j=1}^{k} E_{A_j}(X) \cdot P(A_j)\,.$$

Beweis: Wenn die Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annimmt, so ist nach der Definition des Erwartungswerts $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.
Nun benutzt man die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $B = \{X = x_j\}$ (für $1 \leq j \leq k$). Dann folgt

$$P(X = x_i) = P(B) = \sum_{j=1}^{k} \underline{\hspace{6cm}} = \sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j)$$

Dies eingesetzt, ergibt sich

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underline{\hspace{5cm}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j) \right)$$

Begründen Sie dies mit dem Distributivgesetz.

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j) \right)$$

Begründen Sie dies mit dem Kommutativgesetz.

$$= \sum_{j=1}^{k} P(A_j) \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i)$$

Begründen Sie dies mit dem Distributivgesetz.

$$= \sum_{j=1}^{k} P\left(A_j\right) \cdot \underline{\hspace{6cm}}$$

(wegen der Definition des bedingten Erwartungswerts) □

Im Falle, dass die Zufallsgröße X jede natürliche Zahl annehmen kann, gilt die Formel vom totalen Erwartungswert ebenfalls. Man erhält dann eine unendliche Reihe.

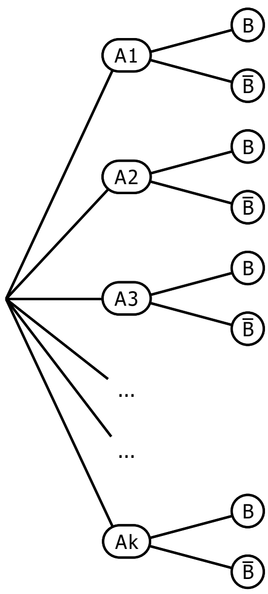
Formel vom totalen Erwartungswert – Aufgaben

1. Ein Geschäft für Küchengroßgeräte bietet beim Kauf eine kostenpflichtige Garantieverlängerung von einem auf drei Jahre an. Die Tabelle zeigt die Anteile der verschiedenen Produktgruppen und dazu jeweils den Anteil der Käufer, die die Garantieverlängerung möchte. Bestimmen Sie, wie hoch der Anteil der Käufer insgesamt ist, der die Verlängerung wählt.

Produktgruppe	Anteil am Verkauf (in Stück)	Anteil mit Garantieverlängerung
Kühlschränke	30 %	28 %
Herde	23 %	25 %
Geschirrspülmaschinen	35 %	40 %
sonstige	12 %	20 %

   a) mithilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit,
   b) mithilfe eines Baumdiagramms.

2. Begründen Sie die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit mithilfe des nebenstehenden Baumdiagramms und der Pfadregeln.



3. Zwei ideale Würfel werden geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der geworfenen Augenzahlen an. Für $1 \leq j \leq 6$ ist A_j das Ereignis, dass der erste Würfel die Zahl j zeigt.
   a) Zeigen Sie, dass $E_{A_1}(X) = 3{,}5$ ist.
   b) Zeigen Sie, dass $E_{A_j}(X) = 3{,}5 \cdot j$ ist (für $1 \leq j \leq 6$).
   c) Bestimmen Sie $E(X)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.