Formel vom totalen Erwartungswert – Erarbeitung – Lösungen

Vorüberlegung:

$P(X=1) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{1}{4}$ und $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$

$P_A(X=1) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$ und $P_{\bar{A}}(X=1) = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$

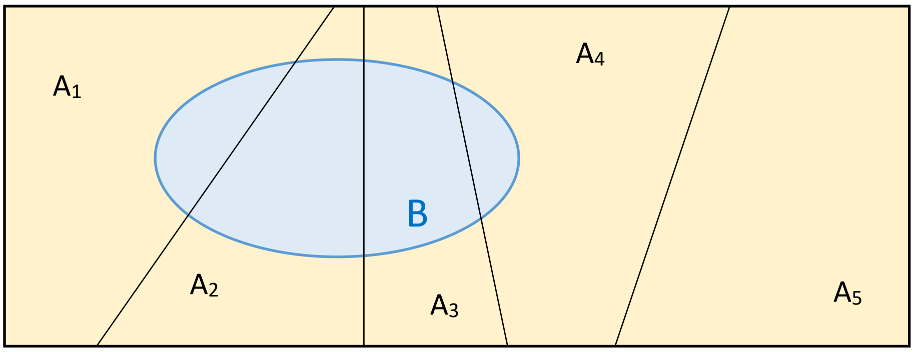
$P_A(X=1) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(X=1) \cdot P(\bar{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = P(X=1)$

Satz (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Beweis:

(1) Es gilt $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$.

1. Möglichkeit: Veranschaulichung im Mengendiagramm



2. Möglichkeit: formaler Beweis

Wenn $x \in B$ ist, dann existiert ein j mit $1 \leq j \leq k$ und $x \in A_j$. Denn $\sum_{j=1}^{k} P(A_j) = 1$, d.h. die A_j überdecken die ganze Ergebnismenge. Somit ist $x \in B \cap A_j \subseteq (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$.

Wenn umgekehrt $x \in B \cap A_j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$ und $x \in A_j$ ist, so gilt insbesondere $x \in B$.

(2) Die $B \cap A_j$ sind paarweise disjunkt, da die A_j paarweise disjunkt sind. [Formal: Angenommen es existiert ein $x \in (B \cap A_s) \cap (B \cap A_t)$, dann gilt insbesondere $x \in A_s \cap A_t$ im Widerspruch zur Disjunktheit der A_j.]

(3) Es gilt $P_{A_j}(B) \cdot P(A_j) = P(B \cap A_j)$. Denn nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist $P_{A_j}(B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)}$. Diese Gleichung umgeformt ergibt die Behauptung.

(4) Wegen (1) und (2) ist $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j)$.

(5) Wegen (3) ist $\sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)$. □

Fortsetzung der Vorüberlegung: Im oben betrachteten Zufallsexperiment gilt:

$E(X) = 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

$E_A(X) = 0 + 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$E_{\bar{A}}(X) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$
$P_A(X = x)$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\bar{A}}(X = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

$$E_A(X) \cdot P(A) + E_{\bar{A}}(X) \cdot P(\overline{A}) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = E(X)$$

Satz (Formel vom totalen Erwartungswert)

Beweis: Wenn die Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, so ist nach der Definition des Erwartungswerts $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.

Nun benutzt man die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $B = \{X = x_i\}$ (für $1 \leq i \leq n$). Dann folgt

$$P(X = x_i) = P(B) = \sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j)$$

Dies eingesetzt, ergibt sich

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j) \right)$$

Begründung: Die Summe $\sum_{j=1}^{k} P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j)$ wird mit x_i multipliziert. Nach dem Distributivgesetz erhält man ausmultipliziert die Summe, bei der jeder Summand mit x_i multipliziert wird: $\sum_{j=1}^{k} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j)$.

[Ohne Summenzeichen geschrieben:

$$x_i \cdot \left(P_{A_1}(X = x_i) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(X = x_i) \cdot P(A_2) + \cdots + P_{A_k}(X = x_i) \cdot P(A_k) \right)$$
$$= x_i \cdot P_{A_1}(X = x_i) \cdot P(A_1) + x_i \cdot P_{A_2}(X = x_i) \cdot P(A_2) + \cdots$$
$$+ x_i \cdot P_{A_k}(X = x_i) \cdot P(A_k)]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j) \right)$$

Begründung: Bei einer Summe kann die Reihenfolge der Summanden vertauscht werden (Kommutativgesetz). [Ohne Summenzeichen geschrieben:

$$x_1 \cdot P_{A_1}(X = x_1) \cdot P(A_1) + x_1 \cdot P_{A_2}(X = x_1) \cdot P(A_2) + \cdots + x_1 \cdot P_{A_k}(X = x_1) \cdot P(A_k)$$
$$+ x_2 \cdot P_{A_1}(X = x_2) \cdot P(A_1) + x_2 \cdot P_{A_2}(X = x_2) \cdot P(A_2) + \cdots + x_2 \cdot P_{A_k}(X = x_2) \cdot P(A_k)$$
$$+ \cdots +$$
$$+ x_n \cdot P_{A_1}(X = x_n) \cdot P(A_1) + x_n \cdot P_{A_2}(X = x_n) \cdot P(A_2) + \cdots + x_n \cdot P_{A_k}(X = x_n) \cdot P(A_k)$$
$$= x_1 \cdot P_{A_1}(X = x_1) \cdot P(A_1) + x_2 \cdot P_{A_1}(X = x_2) \cdot P(A_1) + \cdots + x_n \cdot P_{A_1}(X = x_n) \cdot P(A_1)$$
$$+ x_1 \cdot P_{A_2}(X = x_1) \cdot P(A_2) + x_2 \cdot P_{A_2}(X = x_2) \cdot P(A_2) + \cdots + x_n \cdot P_{A_2}(X = x_n) \cdot P(A_2)$$
$$+ \cdots +$$
$$+ x_1 \cdot P_{A_k}(X = x_1) \cdot P(A_k) + x_2 \cdot P_{A_k}(X = x_2) \cdot P(A_k) + \cdots + x_n \cdot P_{A_k}(X = x_n) \cdot P(A_k) \qquad]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(A_j) \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i)$$

Begründung: Bei der Summe $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i) \cdot P(A_j)$ wird $P(A_j)$ ausgeklammert. Denn dieser Faktor kommt in jedem Summanden vor und hängt nicht von i ab. Nach dem Distributivgesetz erhält man $P(A_j) \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_{A_j}(X = x_i)$.

[Ohne Summenzeichen geschrieben:

$$x_1 \cdot P_{A_j}(X = x_1) \cdot P\left(A_j\right) + x_2 \cdot P_{A_j}(X = x_2) \cdot P\left(A_j\right) + \cdots + x_n \cdot P_{A_j}(X = x_n) \cdot P\left(A_j\right)$$
$$= P\left(A_j\right) \cdot \left(x_1 \cdot P_{A_j}(X = x_1) + x_2 \cdot P_{A_j}(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P_{A_j}(X = x_n)\right)]$$

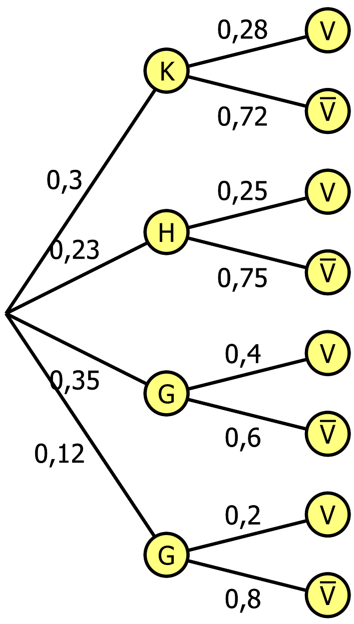
$$= \sum_{j=1}^{k} P\left(A_j\right) \cdot E_{A_j}(X)$$

(nach der Definition des bedingten Erwartungswerts) □

Formel vom totalen Erwartungswert – Aufgaben – Lösungen

1. Betrachtet wird das Ereignis V: „Der Käufer wählt die Garantieverlängerung).
   a) Die Aufteilung erfolgt in die Ereignisse K (Kühlschränke), H (Herde), G (Geschirrspülmaschinen) und S (Sonstige). Der Tabelle entnimmt man:
   $P(K) = 0{,}3$, $P(H) = 0{,}23$, $P(G) = 0{,}35$, $P(S) = 0{,}12$ und
   $P_K(V) = 0{,}28$, $P_H(V) = 0{,}25$, $P_G(V) = 0{,}4$, $P_S(V) = 0{,}2$.
   Damit ergibt sich mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
   $P(V) = P_K(V) \cdot P(K) + P_H(V) \cdot P(H) + P_G(V) \cdot P(G) + P_S(V) \cdot P(S)$
   $= 0{,}3 \cdot 0{,}28 + 0{,}23 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}4 + 0{,}12 \cdot 0{,}2 = 0{,}3055$

   b) mithilfe eines Baumdiagramms:
   $P(V) = 0{,}3 \cdot 0{,}28 + 0{,}23 \cdot 0{,}25$
   $+0{,}35 \cdot 0{,}4 + 0{,}12 \cdot 0{,}2$
   $= 0{,}3055$



2. Nach der ersten Pfadregel (Produktregel) multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades und erhält $P(A_j \cap B) = P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)$ für $1 \leq j \leq k$. Nach der zweiten Pfadregel (Summenregel) addiert man die zum Ereignis gehörenden Wahrscheinlichkeiten und erhält
   $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)$

3. a) $E_{A_1}(X)$ ist der bedingte Erwartungswert für das Produkt der Augenzahlen unter der Bedingung, dass der erste Würfel eine „1“ zeigt. Dieses ist gleich der Augenzahl des zweiten Würfels. Damit ist $E_{A_1}(X)$ der Erwartungswert für die Augenzahl beim einmaligen Würfeln, also 3,5.

b) Für $j = 3$ zum Beispiel ist $P_{A_3}(X = i) = \frac{1}{6}$, wenn $i \in \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ und $P_{A_3}(X = i) = 0$ sonst. Denn unter der Bedingung, dass der erste Würfel eine „3" zeigt, können nur Vielfache von 3 als Produkt der Augenzahlen auftreten.
Für $1 \leq j \leq 6$ ist allgemein die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{A_j}(X = i) = \frac{1}{6}$, wenn $i \in \{j; 2j; 3j; 4j; 5j; 6j\}$ und $P_{A_j}(X = i) = 0$ sonst.
Somit ist $E_{A_j}(X) = \frac{1}{6} \cdot (j + 2j + 3 + 4j + 5j + 6j) = \frac{1}{6} \cdot j \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot j \cdot 21 = 3{,}5j$

c) Die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_6$ sind paarweise disjunkt, haben alle positive Wahrscheinlichkeit und $\sum_{j=1}^{6} P(A_j) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Damit kann die Formel vom totalen Erwartungswert angewendet werden und es ergibt sich

$$E(X) = \sum_{j=1}^{6} E_{A_j}(X) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{6} 3{,}5 \cdot j \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{6} j = 3{,}5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 21$$
$$= 12{,}25\ .$$

Beim Werfen zweier Würfel kann man auf lange Sicht im Durchschnitt pro Wurf eine Augensumme von 12,25 erwarten.
[Dieses Resultat erhält man auch direkt aus der Multiplikationsregel für Erwartungswerte. Diese besagt, dass für stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen X und Y gilt: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. Offensichtlich sind die Augensummen der beiden Würfel unabhängig.]