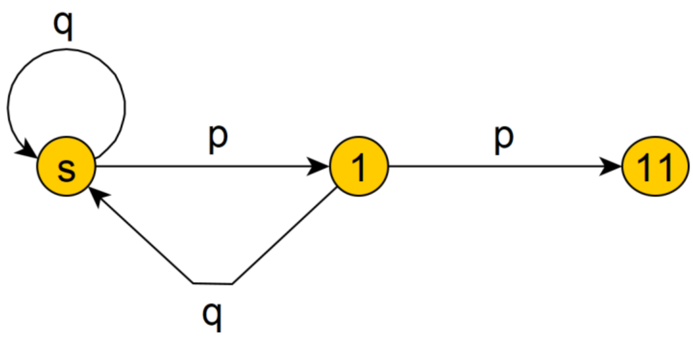
# Markov-Ketten – Erarbeitung

Im Folgenden geht es um das Warten auf den ersten Doppeltreffer bei einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Versuchen. Wie üblich wird ein Treffer mit 1 bezeichnet, dann entspricht das Warten auf den ersten Doppeltreffer dem Warten auf das Muster 11. Dies lässt sich mithilfe eines **Zustandsgraphen** beschreiben. Dabei steht „s“ für „Start“.




a) Erläutern Sie diesen Zustandsgraphen.

b) Erstellen Sie einen Zustandsgraphen für das Warten auf das Muster 01.

Diese Situationen sind Beispiele für *Markov-Ketten*.

**Definition:** Eine (endliche, homogene) **Markov-Kette** ist eine Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsgrößen, für die gilt:

(i) Die $X_n$ nehmen Werte aus einer endlichen Menge an. Diese Werte nennt man **Zustände**.

(ii) Zu jeweils zwei Zuständen $i$ und $j$ existiert eine Zahl $p_{ij} \in [0; 1]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$.

Dabei wird der Index $n$ als Zeitpunkt gedeutet. Der Beginn ist zur Zeit 0 mit dem Zustand, den $X_0$ annimmt. Es folgen die Zeitpunkte 1, 2, 3 usw.

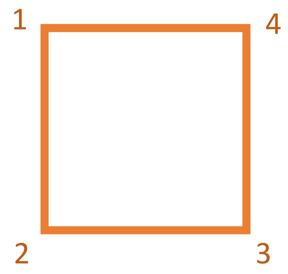
$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $n + 1$ der Zustand $j$ angenommen wird, wenn zum Zeitpunkt $n$ der Zustand $i$ angenommen wurde. Die Eigenschaft (ii) besagt, dass diese bedingte Wahrscheinlichkeit weder vom konkreten Zeitpunkt $n$ noch von den Zuständen zu den Zeitpunkten davor (also 0, 1, … , n – 1) abhängt.

$p_{ij}$ heißt **Übergangswahrscheinlichkeit** vom Zustand $i$ zum Zustand $j$.

Ein Zustand $i$, für den $p_{ii} = 1$ gilt, heißt **absorbierend**. Ist $p_{ii} < 1$, so nennt man $i$ einen **inneren Zustand**.

# Markov-Ketten – Aufgaben

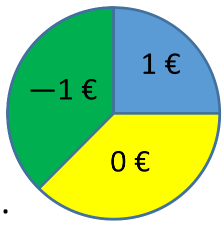
1. Eine Person steht in einer Ecke eines quadratischen Raums. Sie würfelt mit einem idealen Würfel. Fällt eine 1 oder 2, bleibt sie in ihrer Ecke. Fällt eine 3 oder 4, geht sie nach links zur nächsten Ecke. Bei einer 5 oder 6 geht sie nach rechts zur nächsten Ecke. Zu Beginn befindet sich die Person in der Ecke Nr. 1.

   Begründen Sie, dass man diese Situation mithilfe einer Markov-Kette modellieren kann. Geben Sie die Zustände und die Übergangswahrscheinlichkeiten an. Zeichnen Sie den zugehörigen Zustandsgraphen.

2. Begründen Sie, dass das Warten auf den ersten Doppeltreffer bei einer Folge unabhängiger Bernoulli-Versuche mithilfe einer Markov-Kette modelliert werden kann. Geben Sie die Zustände und die Übergangswahrscheinlichkeiten an. Welche Zustände sind absorbierend?

3. Bei einem Spiel darf man das nebenstehende Glücksrad drehen. Man erhält entweder 1 €, nichts oder muss 1 € bezahlen. Ein Spieler setzt 3 €. Er spielt das Spiel so oft, bis er entweder 5 € besitzt oder sein Einsatz aufgebraucht ist.

   Modellieren Sie dieses Spiel mithilfe einer Markov-Kette. Geben Sie die Zustände an. Zeichnen Sie den zugehörigen Zustandsgraphen.