Geometrische Verteilung – Erarbeitung

Beim „Mensch-ärgere-dich-nicht"-Spiel darf man erst dann eine Spielfigur aufs Spielfeld setzen, wenn man eine Sechs gewürfelt hat. Das Warten darauf kommt einem manchmal sehr lang vor.

a) Schätzen Sie zunächst, wie oft man im Durchschnitt auf lange Sicht würfeln muss, bis zum ersten Mal eine Sechs geworfen wird: ________________

b) Ein idealer Würfel wird nacheinander geworfen, bis die erste Sechs erscheint. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten Sechs.

$P(X = 1) =$ ___________________, $P(X = 2) =$ ___________________,

$P(X = 7) =$ ___________________, $P(X = k) =$ ___________________.

X kann die folgenden Werte annehmen: _______________________________

c) Ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p (wobei $0 < p < 1$ ist) wird solange unabhängig wiederholt, bis zum ersten Mal ein Treffer auftritt. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Durchführungen. Ihre Verteilung nennt man **geometrische Verteilung mit Parameter** p.

Es ist $P(X = k) =$ _______________ für k ___________________________.

Anmerkungen:

1. Der Name geometrische Verteilung kommt daher, dass die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ eine geometrische Folge bilden, d.h. der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.)
2. Oftmals wird auch die Verteilung von $X - 1$, also die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer, als geometrische Verteilung bezeichnet. Dann ist $P(X = k) =$ ____________.

d) Nachweis, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt:

- *Nicht-Negativität*: Für jedes k ist $0 \leq P(X = k) \leq 1$,

  da ____

- *Normiertheit*: Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}$ _________________

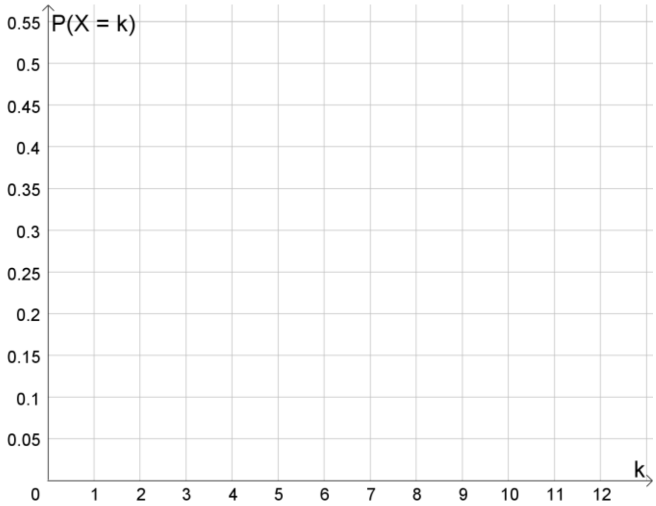
  $= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty}$ ___________ $= p \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} =$ _______

  (gemäß der Formel für die geometrische Reihe, da $0 < 1 - p < 1$)

e) Exemplarisch sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die Histogramme für p = $\frac{1}{6}$ und p = $\frac{1}{2}$ abgebildet.

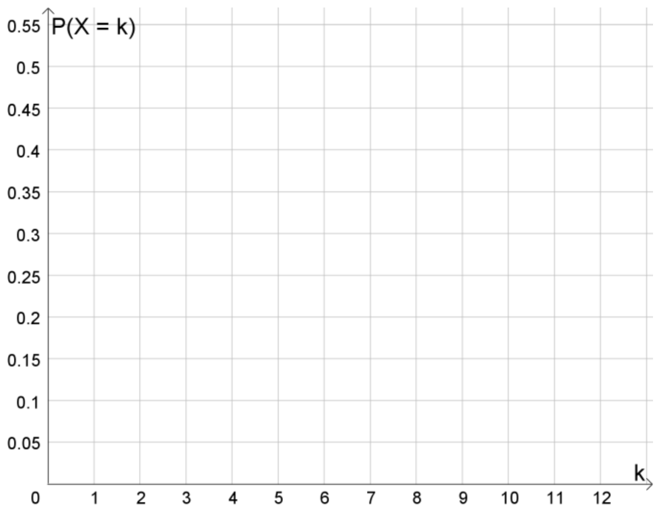
p = $\frac{1}{6}$

k	1	2	3	4	5	6	...
$P(X = k)$							...



p = $\frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6	...
$P(X = k)$							...



f) Wie Sie wissen, berechnet man bei einer Zufallsgröße Y, die die Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(Y = y_1), P(Y = y_2), \dots P(Y = y_n)$ annimmt, den Erwartungswert wie folgt:

$E(Y) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Wenn die Zufallsgröße Y jede natürliche Zahl als Wert annehmen kann, ist der **Erwartungswert** entsprechend als Summe der Produkte aus Wert und zugehöriger Wahrscheinlichkeit definiert. Man erhält die unendliche Reihe

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(Y = k)$$

Auch in diesem Fall interpretiert man den Erwartungswert als durchschnittlichen Wert der Zufallsgröße auf lange Sicht.

g) **Satz:** Für den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsgröße X mit Parameter p gilt: $E(X) = \frac{1}{p}$.

<u>Beweis:</u> Setze $q = p - 1$.

$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p$

$= p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \cdots$

$= (1 - q) + 2q(1 - q) + 3\underline{\quad}(1 - q) + 4\underline{\quad}(1 - q) + 5q^4(1 - q) + \cdots$

$= 1 - q + 2q - 2q^2 + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$= 1 + q + q^2 + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$= \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \underline{\qquad\qquad\quad} = \underline{\qquad\qquad\quad}$

(gemäß der Formel für die geometrische Reihe, da $0 < q < 1$)

h) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsgröße, die das Warten auf die erste Sechs beim Werfen eines idealen Würfels zählt: $E(X) = \underline{\qquad\quad}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Schätzung aus a).

Geometrische Verteilung – Aufgaben

1. Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsgröße X, die geometrisch-verteilt ist mit Parameter 0,7.

2. Zwei ideale Münzen werden gleichzeitig geworfen. Als Treffer gilt, wenn beide Zahl zeigen. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Durchführungen bis zum ersten Treffer.

    a) Begründen Sie, dass X geometrisch-verteilt ist und geben Sie den Parameter an.

    b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie diesen.

3. Begründen Sie, dass für eine geometrisch-verteilte Zufallsgröße X mit Parameter p gilt:

    a) $P(X > k) = (1-p)^k$ für $k = 1; 2; 3 \ldots$

    b) $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$ für $k = 1; 2; 3 \ldots$

4. Ein idealer Würfel wird nacheinander geworfen.

    a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach sechs Würfen mindestens eine Sechs geworfen wurde.

    b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach zehn Würfen noch keine Sechs geworfen wurde.

    c) Wie oft muss man mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs zu werfen?

5. In einer Urne liegen vier schwarze und eine rote Kugel. Es werden so lange zufällig Kugeln mit Zurücklegen gezogen, bis die rote Kugel gezogen wird.

    a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Kugel zum ersten Mal beim dritten Zug gezogen wird.

    b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens fünfmal gezogen wird.

    c) Wie oft wird im Mittel auf lange Sicht gezogen?

d) Anna und Benjamin vereinbaren das folgende Spiel: Wenn höchstens dreimal gezogen wird, muss Anna Benjamin einen Euro bezahlen. Ansonsten zahlt Benjamin Anna einen Euro. Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

6. Begründen Sie, dass für eine geometrisch-verteilte Zufallsgröße X mit Parameter p gilt: $P(X = k + l \mid X > k) = P(X = l)$ für $k, l = 1; 2; 3 \ldots$
   Diese Eigenschaft nennt man die *Gedächtnislosigkeit* der geometrischen Verteilung. Interpretieren Sie sie am Beispiel des Wartens auf die erste Sechs beim Würfeln.

7. Anja und Bettina drehen in unabhängiger Folge ein Glücksrad mit den Sektoren A und B. Das Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit p (bzw. $1 - p$) im Sektor A (bzw. B) stehen. Gewonnen hat diejenige Spielerin, welche als Erste erreicht, das das Glücksrad in ihrem Sektor stehen bleibt. Anja beginnt. Zeigen Sie
   a) Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja ist $\frac{p}{1-p\cdot(1-p)}$.
   b) Im Fall $p = \frac{(3-\sqrt{5})}{2} \approx 0{,}382$ besitzen beide Spielerinnen die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit.[1]

[1] aus: Henze, Norbert: Stochastik für Einsteiger, 12. Auflage, Springer Spektrum Wiesbaden 2018, S. 195