ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Mögliche Stundenverteilung zum Thema Linienintegrale (8 h)

Nr	Inhalte	Begleitmaterial
1/2	Einstieg in das Thema Beispiele für Funktionen mit zwei Variablen und deren Darstellung als Fläche im Raum Veranschaulichung eines Linienintegrals mithilfe eines Papierstreifens Sonderfall: $f(x;y) = 1$ Länge eines Parabelbogens ($y = \frac{1}{2} \cdot x^2$) (SuS sollen eigenständig näherungsweise die Länge berechnen) Präsentation der Ergebnisse im Plenum Herleitung der Formel zur Berechnung der Länge L eines Kurvenstückes im Plenum $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ Beginn der Berechnung der Länge des Parabelbogens im Plenum: $L = \int_0^4 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2} dx$	Aufgabenblatt: Länge eines Parabelbogens
3/4	Fortsetzung der Berechnung der Länge des Parabelbogens Dazu Einschub: Definition und Eigenschaften der Hyperbolischen Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ Ableitungen und $1 + (\sinh(x))^2 = (\cosh(x))^2$ Definition des Linienintegrals in der Normal-darstellung: $\int_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ Beispiel: $f(x;y) = x \cdot y$; Weg 1: Strecke $\overline{PQ}$	

Nr	Inhalte	Begleitmaterial
5/6	Fortführung des Beispiels Weg 2: Viertelkreis mit Mittelpunkt O zwischen $P(0 \mid 1)$ und $Q(1 \mid 0)$ Definition des Linienintegrals in Parameterform: $\int_a^b f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ Diskussion über weitere alternative Wege Welcher Weg führt zu einem kleineren Wert? Weg 3 entlang der Koordinatenachsen liefert den Wert 0. Weg 4: Viertelkreis mit Mittelpunkt M$(1 \mid 1)$ zwischen $P(0 \mid 1)$ und $Q(1 \mid 0)$	
7/8	Übungsstunde zur Kurvenlänge und zu Linien-integralen (Aufgaben vom Übungsblatt)	Übungsblatt: Aufgaben zu Linien-integralen

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Linienintegrale“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Linienintegrale“ wurde in der Klassenstufe 12 in vier Doppelstunden unterrichtet. Die Anregung Linienintegrale zu behandeln kam von einem Schüler, der im Zuge der Unterrichtseinheit „Integrationstechniken“ im Unterricht die Frage stellte, was denn eigentlich Linienintegrale wären. Er war einen Tag pro Woche zum Frühstudium (Jura) an der Universität und hatte dort den Begriff aufgeschnappt.

In der Fachliteratur werden Linienintegrale auch Kurvenintegrale oder Wegintegrale genannt. Man unterscheidet Linienintegrale 1.Art und Linienintegrale 2.Art.
Bei Linienintegralen 1.Art wird über ein Skalarfeld integriert, bei Linienintegralen 2.Art über ein Vektorfeld. In dieser Unterrichtseinheit wurden nur Linienintegrale über zweidimensionale Skalarfelder f mit $f(x;y)$ betrachtet.

Die Kurve längs der integriert wird, heißt auch Integrationsweg und kurz Weg ($y(x)$).

Der Ausdruck $\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ heißt Wegelement oder Längenelement. Im Spezialfall $f(x;y)=1$ ergibt das Linienintegral die Länge L des Weges entlang der Kurve.

Es gibt zwei prinzipielle Möglichkeiten Linienintegrale über $f(x;y)$ zu berechnen.
Man ersetzt im Funktionsterm $f(x;y)$ die Variable y durch den Term $y(x)$ und erhält somit das Integral $\int_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$. Man kann aber auch die beiden Variablen x und y parametrisieren und erhält z.B. mit $x(t)$ und $y(t)$ und dem Wegelement $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$ das Integral $\int_a^b f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$.

In der ersten Doppelstunde wurden zunächst einige Beispiele für Funktionen mit zwei Variablen und deren Veranschaulichung im dreidimensionalen Raum betrachtet.
Dazu gehörte auch eine „modifizierte“ Ebenengleichung ($x_3=6-2x_1+3x_2$), die die Schülerinnen und Schüler aus der analytischen Geometrie kennen. Danach wurde den Schülerinnen und Schülern mithilfe eines Papierstreifens ein Linienintegral veranschaulicht. An diesem Streifen war an einer Seite mit einer Schere ein Profil geschnitten worden. Der Streifen kann als Kurve gebogen werden und stellt somit einen Schnitt durch den Raum unter dem Graphen von f mit $f(x;y)$ dar.

Im Zusammenhang mit den Linienintegralen (Spezialfall $f(x;y)=1$) sollte man natürlich auch die Länge eines Kurvenstückes thematisieren, um die Rolle des Wegelements besser verstehen zu können. Zudem lernen die Schülerinnen und Schüler dadurch, quasi nebenbei, wie man die Länge eines Kurvenstückes berechnet. Als Einstieg in die Berechnung der Länge eines Kurvenstückes sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst in Partnerarbeit die Länge eines Parabelbogens näherungsweise bestimmen (siehe auch Arbeitsblatt Datei 11). Dabei näherten alle Tandems den Kurvenverlauf mithilfe mehrere Sekanten an und berechneten die Summe deren Länge.

Anschließend wurde im Plenum die Formel zur der Länge L eines Kurvenstückes hergeleitet ($L=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$). Dann wurde am Ende der Doppelstunde damit begonnen im konkreten Beispiel die Länge des Parabelbogens zu berechnen.
Das auftretende Integral $\int_0^4 \sqrt{1+x^2}dx$ können die Schülerinnen und Schüler jedoch auch nach Behandlung der Integrationstechniken nicht alleine berechnen.

In der zweiten Doppelstunde wurde die Berechnung des Integrals $\int_0^4 \sqrt{1+x^2}dx$ fortgeführt (siehe auch Datei 04). Um dieses Integral mittels Substitution zu lösen, benötigt man die hyperbolischen Funktionen. Somit besteht hier eine gute Gelegenheit den Schülerinnen und Schülern die hyperbolischen Funktionen vorzustellen.

Im Plenum wurden die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ definiert und deren Ableitungen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig berechnet. Anschließend wurde noch der wichtige Zusammenhang $1+(\sinh(x))^2=(\cosh(x))^2$ thematisiert. Wegen der späteren Anpassung der Integralgrenzen wurden auch noch die Umkehrfunktionen $Ar\sinh(x)$ und $Arcos\text{h}(x)$ kurz angesprochen.
Am Ende der Doppelstunde wurde das Linienintegral definiert und ein erstes Beispiel mit vier verschiedenen Wegen im Plenum vorgestellt und das Integral für den Weg 1 berechnet (siehe auch Datei 05).
Damit den Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit von der Wahl des Weges bewusst wird, sollte man für eine Funktion f verschiedene Wege zwischen zwei festen Punkten in der x-y- Ebene wählen.

In der dritten Doppelstunde wurden die Integrale längs der Wege 2, 3 und 4 berechnet. Dabei wurde auch die Möglichkeit der Parametrisierung des Weges eingeführt (siehe auch Datei 05).

In der vierten Doppelstunde bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben eines Aufgabenblattes zu Linienintegralen (Datei 11). Die Lösungen dieser Aufgaben (Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.

Mathematik Vertiefungskurs 12

Exakte Berechnung des Parabelbogens

Es gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = x$

Länge des Parabelbogens:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + x^2}dx$$

Um dieses Integral zu berechnen kann man für die Substitution die hyperbolischen Funktionen verwenden.

Definition:

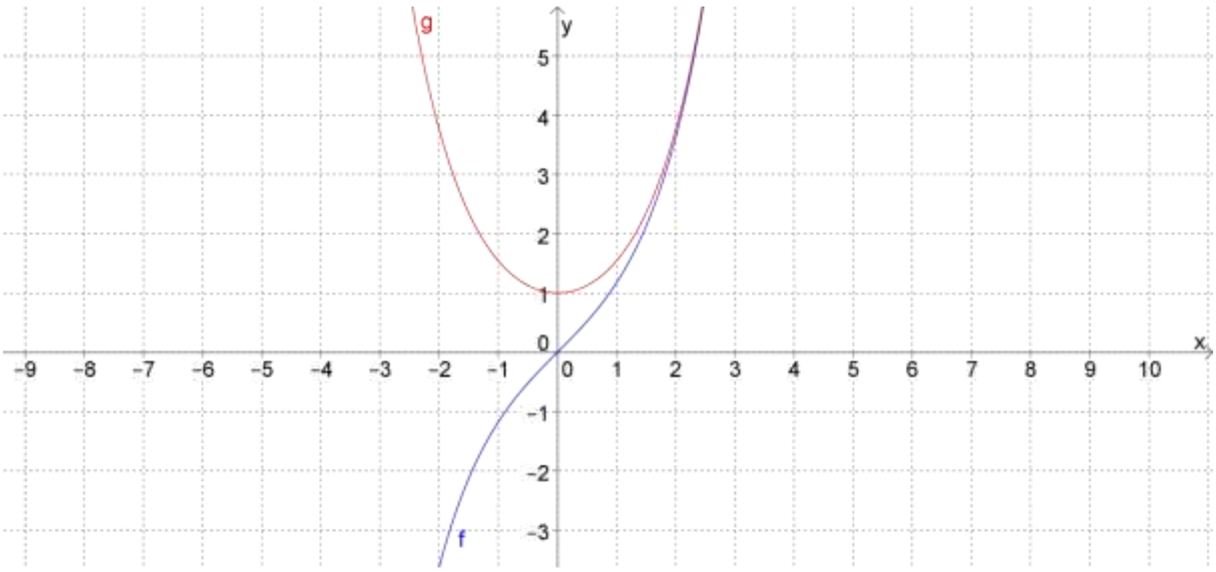
a) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nennt man auch „Sinus hyperbolicus“.

Schreibweise: $\sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

b) Die Funktion g mit $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nennt man auch „Cosinus hyperbolicus“.

Schreibweise: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Eigenschaften und Graphen der hyperbolischen Funktionen



Es gilt:

$$f(x) = \sinh(x) \rightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$g(x) = \cosh(x) \rightarrow g'(x) = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

Zusammenhang: $(\sinh(x))^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$

$$(\cosh(x))^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

➔ $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

➔ $(\cosh(x))^2 = 1 + (\sinh(x))^2$

Die Umkehrfunktionen lauten $\text{Arsinh}(x)$ bzw. $\text{Arcosh}(x)$.

Substitution: $x = \sinh(u)$ ➔ $\frac{dx}{du} = \cosh(x)$ ➔$dx = \cosh(x) \cdot du$

Grenzen: $u_1 = 0$ und $u_2 = Arsinh(4)$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{Arsinh(4)} \sqrt{1+(\sinh(u))^2} \cdot \cosh(u)\, du$$

$$L = \int_0^{Arsinh(4)} \cosh(u) \cdot \cosh(u)\, du = \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du$$

Partielle Integration: $v' = \cosh(u)$; $w = \cosh(u)$ ➔ $v = \sinh(u)$; $w' = \sinh(u)$

$$L = [\sinh(u) \cdot \cosh(u)]_0^{Arsinh(4)} - \int_0^{Arsinh(4)} \sinh(u) \cdot \sinh(u)\, du$$

$$L = 4 \cdot \cosh\big(Arsinh(4)\big) - 0 - \int_0^{Arsinh(4)} (\sinh(u))^2 du$$

Es gilt: $\cosh\big(Arsinh(4)\big) = \sqrt{1+(\sinh(Arsinh(4)))^2} = \sqrt{1+4^2} = \sqrt{17}$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\sinh(u))^2 du$$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 - 1 du$$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du + \int_0^{Arsinh(4)} 1 du$$

$$2 \cdot \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} + [u]_0^{Arsinh(4)} = 4 \cdot \sqrt{17} + Arsinh(4)$$

$$L = \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 2 \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot Arsinh(4) \approx 9{,}29$$

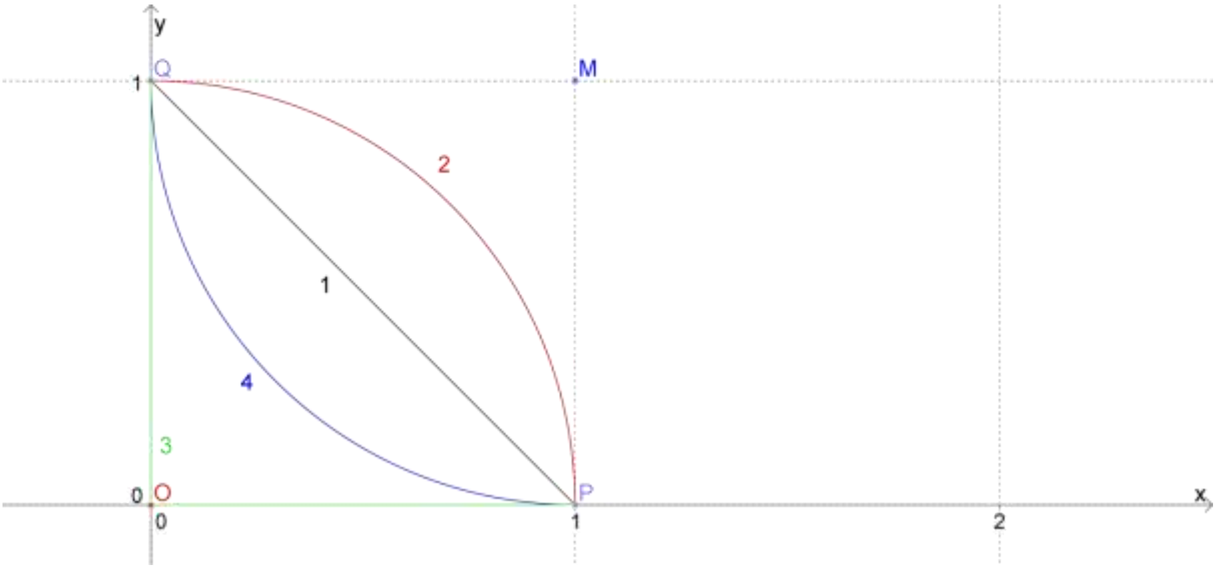
Mathematik Vertiefungskurs 12

Beispiele für Linienintegrale

In diesem Beispiel sollen mehrere Linienintegrale bezüglich der gleichen Funktion f entlang vier verschiedener Wege zwischen den Punkten $P(1 \mid 0)$ und $Q(0 \mid 1)$

berechnet werden. Dabei wird auch die Parameterdarstellung beim Weg 2 eingeführt und dann beim Weg 4 verwendet.

$f(x; y) = x \cdot y$



Weg 1: $y = 1 - x$ mit $0 \leq x \leq 1$ ➔ $y' = -1$

Linienintegral:

$$I_1 = \int_0^1 f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^1 x \cdot (1 - x) \cdot \sqrt{1 + (-1)^2} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot (1 - x) \cdot \sqrt{2} dx = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 x - x^2 dx = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$I_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}236$$

Weg 2: $x = \sin(t)$; $y = \cos(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \cos(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -\sin(t)$

Linienintegral:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt = I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}(\sin(t))^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Alternative Lösung (ohne Parameterdarstellung) für den Weg 2

$y = \sqrt{1-x^2}$ mit $0 \le x \le 1$ ➔ $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x; y(x)) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

$$I_2 = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \cdot dx$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Gibt es Wege, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 3: Entlang der Koordinatenachsen

Da auf den Koordinatenachsen $x = 0$ bzw. $y = 0$ gilt, ist dort der Funktionswert von f immer Null.

Somit gilt auch $I_3 = 0$

Gibt es Wege, die nicht auf den Koordinatenachsen verlaufen, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 4: Viertelkreis mit Mittelpunkt $M(1 \mid 1)$ zwischen P und Q.

$x = 1 - cos(t)$; $y = 1 - \sin(t)$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \sin(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -cos(t)$

Linienintegral:

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos(t)) \cdot (1 - \sin(t)) \cdot \sqrt{(sin(t))^2 + (-cos(t))^2} dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos\,(t)) \cdot (1 - \sin\,(t)) \cdot \sqrt{1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin(t) - \cos(t) + \cos\,(t) \cdot \sin\,(t) dt$$

$$I_4 = \left[t + \cos(t) - \sin(t) + \frac{1}{2}(\sin\,(t))^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\pi - 3}{2} \approx 0{,}071$$

Dass der Weg 4 einen kleineren Wert liefert als der Weg 2 war auch zu erwarten, da die Funktionswerte von f umso kleiner werden, umso näher man dem Ursprung kommt. Wenn bei gleicher Weglänge die Funktionswerte kleiner sind, dann liefert auch das Linienintegral einen kleineren Wert.

Mathematik Vertiefungskurs 12

Länge eines Parabelbogens

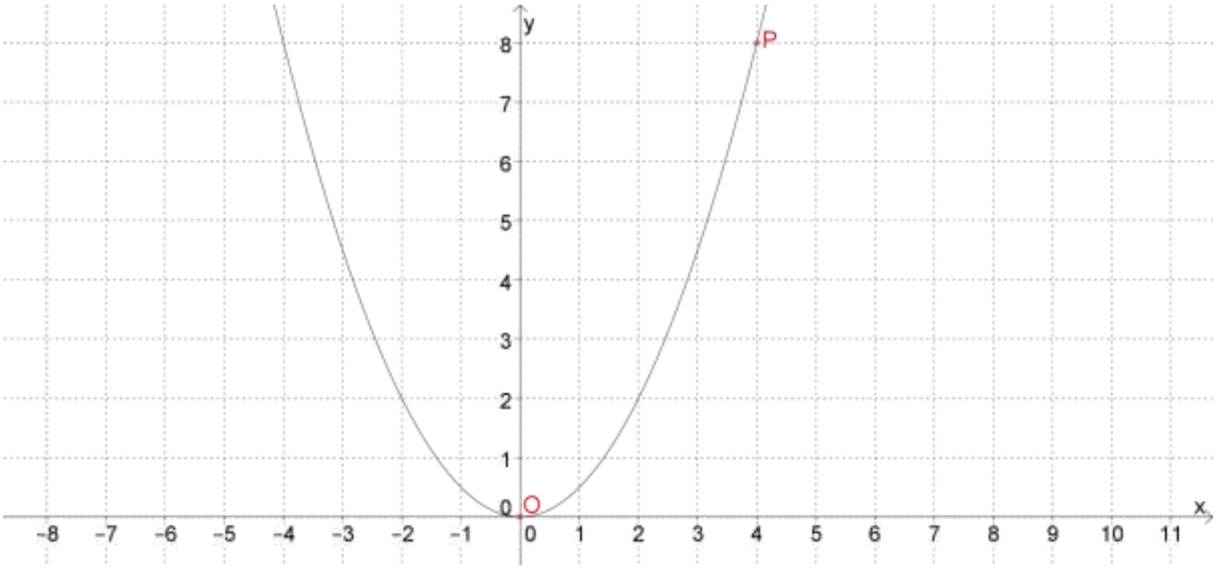
Aufgabenstellung:

Gegeben ist der Graph (Parabel) der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2$. Die Länge des Kurvenstückes vom Punkt $O(0|0)$ bis zum Punkt $P(4|8)$ soll näherungsweise berechnet werden.

Versucht diese Länge möglichst genau zu bestimmen.

Hilfsmittel: WTR

Zeit: 20 Minuten



Vertiefungskurs Mathematik Klasse 12

Aufgaben zu Linienintegralen

AUFGABE 1 Berechne jeweils die Länge des Kurvenstückes zwischen den Punkten A und B auf dem Graphen der Funktion:

a) $(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $A(0 \mid 2)$; $B(2 \mid 0)$

b) $g(x) = \cosh(x)$; $(0 \mid 1)$; $B(2 \mid \cosh(2))$

c) $h(x) = 2\sqrt{x}$; $A(1 \mid 2)$; $B(4 \mid 4)$

AUFGABE 2 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^3}$ und die Punkte $A(1 \mid 1)$ und $B(4 \mid 8)$.

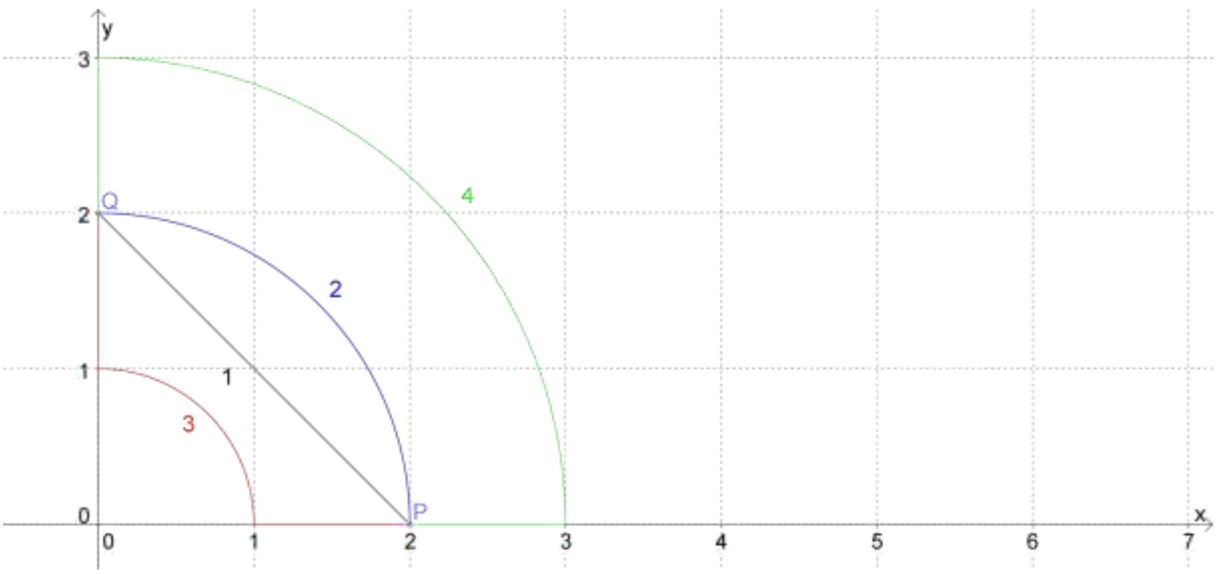
a) Berechne die Länge des Kurvenstückes auf dem Graphen von f zwischen den Punkten A und B.

b) Das Kurvenstück auf dem Graphen von f zwischen den Punkten B und C hat die Länge 50.

Bestimme die Koordinaten des Punktes C.

AUFGABE 3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x; y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ mit $(x; y) \neq (0; 0)$.

Berechne jeweils die Linienintegrale zwischen den Punkten $P(0 \mid 2)$ und $Q(2 \mid 0)$ längs der Wege 1 bis 4.



Hinweis: $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Vertiefungskurs Mathematik Klasse 12

Lösungen: Aufgaben zu Linienintegralen

AUFGABE 1

a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ➔ $f'(x) = \frac{-2x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Länge L des Kurvenstückes: $L = \int_0^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx$$

Substitution: $x = 2\sin(t)$ ➔ $\frac{dx}{dt} = 2\cos(t)$ ➔ $dx = 2\cos(t)\,dt$

Grenzen: $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{\pi}{2}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4}{4-4(\sin(t))^2}}\cdot 2\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4}{4(\cos(t))^2}}\cdot 2\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)}{\cos(t)}dt$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = [2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

b) $g(x) = \cosh(x)$ ➔ $g'(x) = \sinh(x)$

Länge L des Kurvenstückes: $L = \int_0^2 \sqrt{1+(g'(x))^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1+(\sinh(x))^2}dx$

$$L = \int_0^2 \cosh(x)\,dx = [\sinh(x)]_0^2 = \sinh(2) - \sinh(0) = \sinh(2) \approx 3{,}63$$

c) $h(x) = 2\sqrt{x}$ ➔ $h'(x) = \frac{2}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Länge L des Kurvenstückes: $L = \int_1^4 \sqrt{1+(h'(x))^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$

Substitution: $u^2 = 1+\frac{1}{x}$ ➔ $x = \frac{1}{u^2-1}$

Partialbruchzerlegung: $x = \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$

$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2}\right)$ ➔ $dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2}\right)du$

Grenzen: $u_1 = \sqrt{2}$ und $u_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$$L=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\sqrt{u^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)du=\frac{1}{2}\cdot\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\left(-\frac{u}{(u-1)^2}+\frac{u}{(u+1)^2}\right)du$$

$$L=\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u}{(u+1)^2}du}_{I_1}-\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u}{(u-1)^2}du}_{I_2}\right)$$

$$I_1=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u}{(u+1)^2}du=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du=\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{u+1}du}_{I_{1;a}}-\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{(u+1)^2}du}_{I_{1;b}}$$

$$I_{1;a}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{u+1}du=[ln(u+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}=ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)-ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$I_{1;b}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{(u+1)^2}du=\left[-\frac{1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$I_1=ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)-ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$I_2=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u}{(u-1)^2}du=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{u-1+1}{(u-1)^2}du=\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{u-1}du}_{I_{2;a}}+\underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}}\frac{1}{(u-1)^2}du}_{I_{2;b}}$$

$$I_{2;a} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}} \frac{1}{u-1}\,du = [ln(u-1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}} = ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right) - ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$I_{2;b} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}} \frac{1}{(u-1)^2}\,du = \left[-\frac{1}{u-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$I_2 = ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right) - ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$I_1 - I_2 = ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right) - ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right) - ln\left(\sqrt{2}+1\right) + ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+1}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Anwenden von Logarithmengesetzen und Rationalmachen der Nenner liefert:

$$ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right) - ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right) = ln\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}+1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1}\right) = ln\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)^2}{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= ln\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}+1\right)^2\right) = ln\left(\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}+1\right)\right)^2\right) = 2\cdot ln\left(\sqrt{5}+2\right)$$

$$ln\left(\sqrt{2}-1\right) - ln\left(\sqrt{2}+1\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}\right) = 2\cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+1} + \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}-1+\sqrt{\frac{5}{4}}+1}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right)} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}}{\frac{1}{4}} = 4\cdot\sqrt{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{1} = -2\cdot\sqrt{2}$$

$I_1 - I_2 = 2 \cdot ln\left(\sqrt{5} + 2\right) + 2 \cdot ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 4 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{2}$

$I_1 - I_2 = 2 \cdot \left(ln\left(\sqrt{5} + 2\right) + ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$

$L = \frac{1}{2} \cdot (I_1 - I_2) = ln\left(\sqrt{5} + 2\right) + ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 3{,}62$

AUFGABE 2

a) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{1{,}5}$ ➔ $f'(x) = \frac{3}{2} x^{0{,}5} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Länge L des Kurvenstückes: $L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx$

Substitution: $u = 1 + \frac{9}{4}x$ ➔ $x = \frac{4}{9} \cdot (u - 1)$

$\frac{dx}{du} = \frac{4}{9}$ ➔ $dx = \frac{4}{9}du$

Grenzen: $u_1 = \frac{13}{4}$ und $u_2 = 10$

$$L = \int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \int_{\frac{13}{4}}^{10} u^{0{,}5} du = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot u^{1{,}5}\right]_{\frac{13}{4}}^{10} = \frac{8}{27} \cdot \left[\sqrt{u^3}\right]_{\frac{13}{4}}^{10}$$

$$L = \frac{8}{27} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{10} - \frac{13}{4} \cdot \sqrt{\frac{13}{4}}\right) = \frac{8}{27} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{10} - \frac{13}{8} \cdot \sqrt{13}\right) \approx 7{,}63$$

b) $L = \int_4^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_4^a \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = 50$

Aus a) folgt:

$$L = \int_{10}^{1+\frac{9}{4}a} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{8}{27} \cdot \left[\sqrt{u^3}\right]_{10}^{1+\frac{9}{4}a} = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(1 + \frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - 10 \cdot \sqrt{10}\right) = 50$$

➔ $\left(1 + \frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - 10 \cdot \sqrt{10} = \frac{675}{4}$ ➔ $\left(1 + \frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{675}{4} + 10 \cdot \sqrt{10}$

$1 + \frac{9}{4}a = \left(\frac{675}{4} + 10 \cdot \sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}$ ➔ $a = \frac{4}{9} \cdot \left(\left(\frac{675}{4} + 10 \cdot \sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \approx 14{,}77$

➔ $f(a) = \sqrt{a^3} \approx 56{,}79$

➔ $C(14{,}77 \mid 56{,}79)$

AUFGABE 3

Weg 1: $y = 2 - x$ mit $0 \le x \le 2$ ➔ $y' = -1$

Linienintegral:

$$I_1 = \int_0^2 f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + (2-x)^2} \cdot \sqrt{1 + (-1)^2}dx$$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{2x^2 - 4x + 4} \cdot \sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + 1}dx$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 1}dx$$

Substitution: $u = x - 1$ ➔ $x = u + 1$ ➔ $dx = du$

Grenzen: $u_1 = -1$ und $u_2 = 1$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 + 1}du = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [\arctan(u)]_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\arctan(1) - \arctan(-1))$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4} \approx 1{,}11$$

Weg 2: $x = 2 \cdot \sin(t)$; $y = 2 \cdot \cos(t)$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2 \cdot \cos(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -2 \cdot \sin(t)$

Linienintegral:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \cdot (\sin(t))^2 + 4 \cdot (\cos(t))^2} \cdot \sqrt{4 \cdot (\cos(t))^2 + 4 \cdot (\sin(t))^2}dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \cdot ((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2)} \cdot \sqrt{4 \cdot ((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2)}dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

Weg 3: Der Weg 3 besteht aus drei Teilstücken, wobei die Teilstücke 1 und 3 aus Symmetriegründen den gleichen Wert liefern.

Teilstück 1: Strecke von Q zum Punkt $A(0 \mid 1)$

Teilstück 2: Viertelkreis vom Punkt $A(0 \mid 1)$ zum Punkt $B(1 \mid 0)$

Teilstück 3: Strecke von $B(1 \mid 0)$ zum Punkt P

a) Teilstück 3: $y = 0$; $1 \leq x \leq 2$ ➔ $y' = 0$

Linienintegral:

$$I_{3a} = \int_1^2 f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1 + (0)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$I_{3a} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

b) Teilstück 2: $x = \sin(t)$; $y = \cos(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \cos(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -\sin(t)$

Linienintegral:

$$I_{3b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$I_{3b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \cdot \sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt$$

$$I_{3b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1} \cdot \sqrt{1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = 2 \cdot I_{3a} + I_{3b} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2{,}57$$

Weg 4: Der Weg 4 besteht aus drei Teilstücken, wobei die Teilstücke 1 und 3 aus Symmetriegründen den gleichen Wert liefern.

Teilstück 1: Strecke von Q zum Punkt $C(0 \mid 3)$

Teilstück 2: Viertelkreis vom Punkt $C(0 \mid 3)$ zum Punkt $D(3 \mid 0)$

Teilstück 3: Strecke von $D(3 \mid 0)$ zum Punkt P

a) Teilstück 3: $y = 0$; $2 \leq x \leq 3$ ➔ $y' = 0$

Linienintegral:

$$I_{4a} = \int_2^3 f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1 + (0)^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$$

$$I_{4a} = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

b) Teilstück 2: $x = 3 \cdot \sin(t)$; $y = 3 \cdot \cos(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 3 \cdot \cos(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -3 \cdot \sin(t)$

Linienintegral:

$$I_{4b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$I_{4b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(9 \cdot \sin(t))^2 + (9 \cdot \cos(t))^2} \cdot \sqrt{(9 \cdot \cos(t))^2 + 9 \cdot (\sin(t))^2} dt$$

$$I_{4b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{9 \cdot ((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2)} \cdot \sqrt{9 \cdot ((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2)} dt$$

$$I_{4b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{9} \cdot \sqrt{9} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$I_4 = 2 \cdot I_{4a} + I_{4b} = 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \cdot (2 + \pi) \approx 0{,}86$$