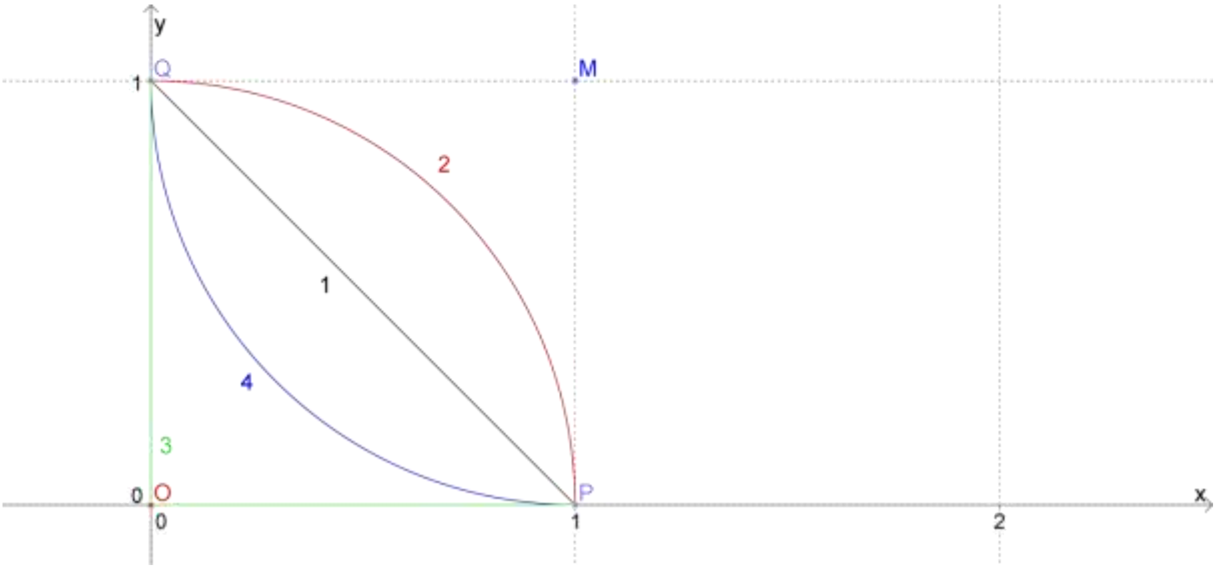
Mathematik Vertiefungskurs 12

Beispiele für Linienintegrale

In diesem Beispiel sollen mehrere Linienintegrale bezüglich der gleichen Funktion f entlang vier verschiedener Wege zwischen den Punkten $P(1 \mid 0)$ und $Q(0 \mid 1)$ berechnet werden. Dabei wird auch die Parameterdarstellung beim Weg 2 eingeführt und dann beim Weg 4 verwendet.

$f(x;y) = x \cdot y$



Weg 1: $y = 1 - x$ mit $0 \leq x \leq 1$ ➔ $y' = -1$

Linienintegral:

$$I_1 = \int_0^1 f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \int_0^1 x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{1+(-1)^2}dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{2}dx = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 x - x^2 dx = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$I_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}236$$

Weg 2: $x = \sin(t)$; $y = \cos(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \cos(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -\sin(t)$

Linienintegral:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt = I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}(\sin(t))^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Alternative Lösung (ohne Parameterdarstellung) für den Weg 2

$y = \sqrt{1-x^2}$ mit $0 \leq x \leq 1$ ➔ $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x; y(x)) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

$$I_2 = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \cdot dx$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Gibt es Wege, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 3: Entlang der Koordinatenachsen

Da auf den Koordinatenachsen $x = 0$ bzw. $y = 0$ gilt, ist dort der Funktionswert von f immer Null.

Somit gilt auch $I_3 = 0$

Gibt es Wege, die nicht auf den Koordinatenachsen verlaufen, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 4: Viertelkreis mit Mittelpunkt $M(1 \mid 1)$ zwischen P und Q.

$x = 1 - cos(t)$; $y = 1 - \sin(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung)

➔ $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \sin(t)$ und $\frac{dy}{dt} = y'(t) = -cos(t)$

Linienintegral:

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos(t)) \cdot (1 - \sin(t)) \cdot \sqrt{(sin(t))^2 + (-cos(t))^2} dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos\,(t)) \cdot (1 - \sin\,(t)) \cdot \sqrt{1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin(t) - \cos(t) + \cos\,(t) \cdot \sin\,(t) dt$$

$$I_4 = \left[t + \cos(t) - \sin(t) + \frac{1}{2}(\sin\,(t))^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\pi - 3}{2} \approx 0{,}071$$

Dass der Weg 4 einen kleineren Wert liefert als der Weg 2 war auch zu erwarten, da die Funktionswerte von f umso kleiner werden, umso näher man dem Ursprung kommt. Wenn bei gleicher Weglänge die Funktionswerte kleiner sind, dann liefert auch das Linienintegral einen kleineren Wert.