ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Linienintegrale“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Linienintegrale“ wurde in der Klassenstufe 12 in vier Doppelstunden unterrichtet. Die Anregung Linienintegrale zu behandeln kam von einem Schüler, der im Zuge der Unterrichtseinheit „Integrationstechniken“ im Unterricht die Frage stellte, was denn eigentlich Linienintegrale wären. Er war einen Tag pro Woche zum Frühstudium (Jura) an der Universität und hatte dort den Begriff aufgeschnappt.

In der Fachliteratur werden Linienintegrale auch Kurvenintegrale oder Wegintegrale genannt. Man unterscheidet Linienintegrale 1.Art und Linienintegrale 2.Art.
Bei Linienintegralen 1.Art wird über ein Skalarfeld integriert, bei Linienintegralen 2.Art über ein Vektorfeld. In dieser Unterrichtseinheit wurden nur Linienintegrale über zweidimensionale Skalarfelder f mit $f(x; y)$ betrachtet.

Die Kurve längs der integriert wird, heißt auch Integrationsweg und kurz Weg ($y(x)$).

Der Ausdruck $\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$ heißt Wegelement oder Längenelement. Im Spezialfall $f(x; y) = 1$ ergibt das Linienintegral die Länge L des Weges entlang der Kurve.

Es gibt zwei prinzipielle Möglichkeiten Linienintegrale über $f(x; y)$ zu berechnen.
Man ersetzt im Funktionsterm $f(x; y)$ die Variable y durch den Term $y(x)$ und erhält somit das Integral $\int_a^b f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$. Man kann aber auch die beiden Variablen x und y parametrisieren und erhält z.B. mit $x(t)$ und $y(t)$ und dem Wegelement $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ das Integral $\int_a^b f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.

In der ersten Doppelstunde wurden zunächst einige Beispiele für Funktionen mit zwei Variablen und deren Veranschaulichung im dreidimensionalen Raum betrachtet.
Dazu gehörte auch eine „modifizierte“ Ebenengleichung ($x_3 = 6 - 2x_1 + 3x_2$), die die Schülerinnen und Schüler aus der analytischen Geometrie kennen. Danach wurde den Schülerinnen und Schülern mithilfe eines Papierstreifens ein Linienintegral veranschaulicht. An diesem Streifen war an einer Seite mit einer Schere ein Profil geschnitten worden. Der Streifen kann als Kurve gebogen werden und stellt somit einen Schnitt durch den Raum unter dem Graphen von f mit $f(x; y)$ dar.

Im Zusammenhang mit den Linienintegralen (Spezialfall $f(x; y) = 1$) sollte man natürlich auch die Länge eines Kurvenstückes thematisieren, um die Rolle des Wegelements besser verstehen zu können. Zudem lernen die Schülerinnen und Schüler dadurch, quasi nebenbei, wie man die Länge eines Kurvenstückes berechnet. Als Einstieg in die Berechnung der Länge eines Kurvenstückes sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst in Partnerarbeit die Länge eines Parabelbogens näherungsweise bestimmen (siehe auch Arbeitsblatt Datei 11). Dabei näherten alle Tandems den Kurvenverlauf mithilfe mehrere Sekanten an und berechneten die Summe deren Länge.

Anschließend wurde im Plenum die Formel zur der Länge L eines Kurvenstückes hergeleitet ($L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$). Dann wurde am Ende der Doppelstunde damit begonnen im konkreten Beispiel die Länge des Parabelbogens zu berechnen.
Das auftretende Integral $\int_0^4 \sqrt{1 + x^2}dx$ können die Schülerinnen und Schüler jedoch auch nach Behandlung der Integrationstechniken nicht alleine berechnen.

In der zweiten Doppelstunde wurde die Berechnung des Integrals $\int_0^4 \sqrt{1+x^2}dx$ fortgeführt (siehe auch Datei 04). Um dieses Integral mittels Substitution zu lösen, benötigt man die hyperbolischen Funktionen. Somit besteht hier eine gute Gelegenheit den Schülerinnen und Schülern die hyperbolischen Funktionen vorzustellen.

Im Plenum wurden die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ definiert und deren Ableitungen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig berechnet. Anschließend wurde noch der wichtige Zusammenhang $1+(\sinh(x))^2 = (\cosh(x))^2$ thematisiert. Wegen der späteren Anpassung der Integralgrenzen wurden auch noch die Umkehrfunktionen $Ar\sinh(x)$ und $Arcos\text{h}(x)$ kurz angesprochen.
Am Ende der Doppelstunde wurde das Linienintegral definiert und ein erstes Beispiel mit vier verschiedenen Wegen im Plenum vorgestellt und das Integral für den Weg 1 berechnet (siehe auch Datei 05).
Damit den Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit von der Wahl des Weges bewusst wird, sollte man für eine Funktion f verschiedene Wege zwischen zwei festen Punkten in der x-y- Ebene wählen.

In der dritten Doppelstunde wurden die Integrale längs der Wege 2, 3 und 4 berechnet. Dabei wurde auch die Möglichkeit der Parametrisierung des Weges eingeführt (siehe auch Datei 05).

In der vierten Doppelstunde bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben eines Aufgabenblattes zu Linienintegralen (Datei 11). Die Lösungen dieser Aufgaben (Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.