Teilbarkeitsregeln

Satz:
Eine natürliche Zahl ist genau dann

a) durch 2 teilbar, wenn ____,

b) durch 3 teilbar, wenn ____,

c) durch 4 teilbar, wenn ____

____,

d) durch 5 teilbar, ____,

e) durch 6 teilbar, ____,

f) durch 7 teilbar, wenn die Zahl durch 7 teilbar ist, die entsteht, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer von der restlichen Zahl subtrahiert,

g) durch 8 teilbar, ____

____,

h) durch 9 teilbar, ____,

i) durch 10 teilbar, ____,

j) durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist,

(alternierende Quersumme von 353 408 = 3 – 5 + 3 – 4 + 0 – 8 = -11

von 27 095 = –2 + 7 – 0 + 9 – 5 = 9)

k) durch 12 teilbar, ____.

Beweis:
Sei n eine natürliche Zahl. Diese habe im Dezimalsystem die Form $a_na_{n-1}...a_2a_1a_0$, wobei $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ Ziffern aus der Menge {0; 1; 2; …; 9} sind.
Dann ist $n = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$.

1. Endstellenregeln

a) $n \equiv$ __________ = __________ (mod 2)

Damit ist n genau dann durch 2 teilbar, wenn ______________________________________.

c) $n \equiv$ ________________________ (mod 4)

Damit ist n genau dann durch 4 teilbar, wenn ______________________________________.

g) $n \equiv$ ________________________ (mod 4)

Damit ist n genau dann durch 8 teilbar, wenn ______________________________________

____.

d) $n \equiv$ ______________________ (mod 5)

Damit ist n genau dann durch 5 teilbar, wenn ___________________________________.

i) $n \equiv$ ______________________ (mod 10)

Damit ist n genau dann durch 10 teilbar, wenn __________________________________.

2. Quersummenregeln

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $10^k \equiv$ _____ $\equiv$ _____ (mod 3).

Damit ist $n \equiv$ ____________________________________ (mod 3).

h) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $10^k \equiv$ _____ $\equiv$ _____ (mod 9).

Damit ist $n \equiv$ ____________________________________ (mod 9).

3. Kombinationen

e) Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, folgt:

Wegen $3|n$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k$. Es muss $2|k$ gelten, sonst ____________________

____

Somit: ____

Wenn n durch 6 teilbar ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 6m$. Also ist ______________________

____.

k) Wenn n durch 3 und durch 4 teilbar ist, folgt: ___________________________________

____

____

____

4. Sonstige Regeln

f) Wir schreiben $n = m \cdot 10 + a_0$. n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $2 \cdot n$ durch 7 teilbar ist. Es ist $2 \cdot n =$ ____ $= 21 \cdot m - (m - 2 \cdot a_0)$.

Da $21 \cdot m$ durch 7 teilbar ist, folgt: n ist genau dann durch 7 teilbar,

wenn ___________________________________ durch 7 teilbar ist.

j) Es ist $10 \equiv$ ______ (mod 11). Also ist $10^k \equiv$ _______ $\equiv$ _______ (mod 11) für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Für gerades k ist also $10^k \equiv$ ________ (mod 11) und für ungerades k ist

$10^k \equiv$ ________ (mod 11).

Wenn n gerade ist, gilt $n \equiv$ ____ (mod 11).

Wenn n ungerade ist, gilt $n \equiv$ _______________________________________ (mod 11).

Aufgaben zu den Teilbarkeitsregeln

1. Wende die Teilbarkeitsregeln auf die folgende Zahl an.

a) 1540 b) 1 623 272 c) 13 678 500 d) 123 456 789

2. Ergänze für 🔔 eine Ziffer so, dass die Zahl 759 420 51🔔 teilbar ist durch

a) 5 b) 9 c) 6 d) 11

3. Begründe, dass die folgenden Teilbarkeitsregeln falsch sind.

a) Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

b) Eine Zahl ist genau dann durch 24 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 6 teilbar ist.

c) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 4 teilbar ist.

4. Formuliere und begründe eine Teilbarkeitsregel für die Zahl

a) 1000 b) 25 c) 20 d) 22