Teilbarkeitsregeln – Lösungen

Satz:

a) durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist,
b) durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist,
c) durch 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist,
d) durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist,
e) durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist,
f) durch 7 teilbar, wenn die Zahl durch 7 teilbar ist, die entsteht, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer von der restlichen Zahl subtrahiert,
g) durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist,
h) durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist,
i) durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist,
j) durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist,
(alternierende Quersumme von 353 408 = 3 – 5 + 3 – 4 + 0 – 8 = -11
von 27 095 = –2 + 7 – 0 + 9 – 5 =9)
k) durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.

Beweis:

Sei n eine natürliche Zahl. Diese habe im Dezimalsystem die Form $a_na_{n-1}…a_2a_1a_0$, wobei $a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n$ Ziffern aus der Menge {0; 1; 2; …; 9} sind.
Dann ist $n = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + … a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$.

1. Endstellenregeln

a) $n \equiv a_0 \cdot 10^0 = a_0 \pmod 2$

Damit ist n genau dann durch 2 teilbar, wenn a_0 durch 2 teilbar ist.

c) $n \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 4$

Damit ist n genau dann durch 4 teilbar, wenn $a_1 \cdot 10 + a_0$ durch 4 teilbar ist.

g) $n \equiv a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 8$

Damit ist n genau dann durch 8 teilbar, wenn $a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$ durch 8 teilbar ist.

d) $n \equiv a_0 \cdot 10^0 = a_0 \pmod 5$

i) $n \equiv a_0 \cdot 10^0 = a_0 \pmod{10}$

2. Quersummenregeln

b) Für jedes $k \in N$ ist $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$.

Damit ist $n \equiv a_n + a_{n-1} + … + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 3$.

h) Für jedes $k \in N$ ist $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$.

Damit ist $n \equiv a_n + a_{n-1} + … + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 9$.

3. Kombinationen

e) Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, folgt: Wegen $3|n$ gibt es $k \in N$ mit $n = 3 \cdot k$.

Es muss $2|k$ gelten, sonst wäre n nicht durch 2 teilbar. Also gibt es $l \in N$ mit $k = 2 \cdot l$.

Somit: $n = 3 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot l = 6 \cdot l$. Also $6 \mid n$.

Wenn n durch 6 teilbar ist, gibt es $m \in N$ mit $n = 6m$. Also ist n durch 2 und durch 3 teilbar.

k) Wenn n durch 3 und durch 4 teilbar ist, folgt: Wegen $3|n$ gibt es $k \in N$ mit $n = 3 \cdot k$.

Es muss $4|k$ gelten, sonst wäre n nicht durch 4 teilbar. Also gibt es $l \in N$ mit $k = 4 \cdot l$.

Somit: $n = 3 \cdot k = 3 \cdot 4 \cdot l = 12 \cdot l$. Also $12 \mid n$.

Wenn n durch 12 teilbar ist, gibt es $m \in N$ mit $n = 12m$. Also ist n durch 3 und durch 4 teilbar.

4. Sonstige Regeln

f) Wir schreiben $n = m \cdot 10 + a_0$

n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $2 \cdot n$ durch 7 teilbar ist.

$2 \cdot n = 20 \cdot m + 2 \cdot a_0 = 21 \cdot m - m + 2 \cdot a_0 = 21 \cdot m - (m - 2 \cdot a_0)$.

Da $21 \cdot m$ durch 7 teilbar ist, folgt:

n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $m - 2 \cdot a_0$ durch 7 teilbar ist.

j) Es ist $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Also ist $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ für jedes $k \in N$.

Für gerades k ist also $10^k \equiv 1 \pmod{11}$ und für ungerades k ist $10^k \equiv -1 \pmod{11}$.

Wenn n gerade ist, gilt $n \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}$.

Wenn n ungerade ist, gilt $n \equiv -a_n + a_{n-1} - \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}$.

Aufgaben zu den Teilbarkeitsregeln – Lösungen

1. a)

a) $1540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ b) $1\,623\,272 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 101$
c) $13\,678\,500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 829$ d) $123\,456\,789 = 3 \cdot 3 \cdot 3607 \cdot 3803$

2.
a) 0 oder 5 b) $7 + 5 + 9 + 4 + 2 + 0 = 27$, also 3 c) 0 oder 6
d) $7 - 5 + 9 - 4 + 2 - 0 + 5 - 1 = 13$, also 9

3. a) Gegenbeispiel: $116 \equiv 4 \pmod{8}$ b) Gegenbeispiel: 12 c) Gegenbeispiel: 22

4.
a) letzte 3 Ziffern 0 b) letzte beiden Ziffern durch 25 c) durch 4 und durch 5
d) durch 2 und durch 11