

Restklassen modulo n – Lösungen

1.

a) $3; 2; 4; 2; 3$

b) $0; 1; 12; 3; 12$

c) z.B. $3; 12; 21; 39; \dots; -6; -15; \dots$

2. Aus $a \equiv c$ und $b \equiv d \pmod{n}$ folgt: $a = c + k \cdot n$ und $b = d + l \cdot n$ für zwei Zahlen $k, l \in \mathbb{IN}$. Damit ist $a + b = c + k \cdot n + d + l \cdot n = c + d + (k + l) \cdot n$. Also ist $a + b \equiv c + d \pmod{n}$.

3. Aus $a \equiv c$ und $b \equiv d \pmod{n}$ folgt: $a = c + k \cdot n$ und $b = d + l \cdot n$ für zwei Zahlen $k, l \in \mathbb{IN}$. Damit ist $a \cdot b = (c + k \cdot n) \cdot (d + l \cdot n) = c \cdot d + c \cdot l \cdot n + d \cdot k \cdot n + k \cdot l \cdot n \cdot n$
 $= c \cdot d + (c \cdot l + d \cdot k + k \cdot l \cdot n) \cdot n$. Damit ist $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$.

4. Nach der Regel aus 3. ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \equiv \underbrace{c \cdot c \cdot \dots \cdot c}_{n\text{-mal}} = c^n$.

5.

a) $34 + 97 \equiv 4 + 1 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$

b) $587 + 5\,457\,803 \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$

c) $-13 - 25 \equiv -1 - 1 = -2 \equiv 2 \pmod{4}$

d) $15 \cdot 91 \equiv 4 \cdot 3 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$

e) $658 \cdot 49 \equiv 658 \cdot 0 = 0 \pmod{7}$

f) $12\,508 \cdot 5\,093 \equiv 8 \cdot 3 = 24 \equiv 4 \pmod{10}$

g) $7^3 \equiv 1^3 = 1 \pmod{3}$

h) $5^{100} \equiv 1^{100} = 1 \pmod{4}$

i) $5^{100} \equiv (-1)^{100} = 1 \pmod{6}$

Aufgaben zum Rechnen mit Restklassen

1. Denke Dir sechs ganze Zahlen aus und berechne deren Fünferreste. Mindestens zwei davon sind gleich. Warum muss das so sein?

2. Berechne den Elferrest von 200; 500; 700; 1000 und 1 000 000.

3. Berechne:

a) $2^2; 2^4; 2^8; 2^{12}; 2^{100} \pmod{3}$

b) $2^4; 2^{20}; 2^{100}; 2^{1001} \pmod{5}$

c) $2^3; 2^{20}; 2^{100} \pmod{7}$

d) $3^{20} \pmod{5}$.

Was kann man daraus für die Endziffer von 3^{20} schließen?

4. Berechne $3^4 \pmod{10}$. Bestimme damit die Endziffer von 3^{2020} .

5. a) Untersuche, welchen Rest Quadratzahlen modulo 10 haben können.

b) Zeige, dass 25 036 008 keine Quadratzahl sein kann.

6. Welcher Wochentag ist der / war der

a) 23.09.2020

b) 01.10.2019

c) 01.10.2020

d) 01.10.2025

e) 02.02.2019

f) euer nächster / übernächster Geburtstag

g) 01.10.2030

h) 01.01.2010

i) 25.05.2012

j) 01.01.2000

k) Tag deiner Geburt