Vertiefungskurs Mathematik 12

Weitere Beispiele für Taylorreihen mit $x_0 = 0$

Nachdem man die Taylorreihen z.B. am Beispiel 1 der Sinusfunktion im Plenum eingeführt hat, können die Schülerinnen und Schüler z.B. die Taylorreihe für f mit $f(x) = cos\ (x)$ und $f(x) = e^x$ selbst bestimmen.

Die Taylorreihe einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ lautet:

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$$

Beispiel 2: $f(x) = cos\ (x)$; $x_0 = 0$

Es gilt: $f'(x) = -sin\ (x)$; $f''(x) = -cos\ (x)$; $f'''(x) = sin\ (x)$; $f^{(4)}(x) = cos\ (x)$

➔ $f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) \ldots = 1$

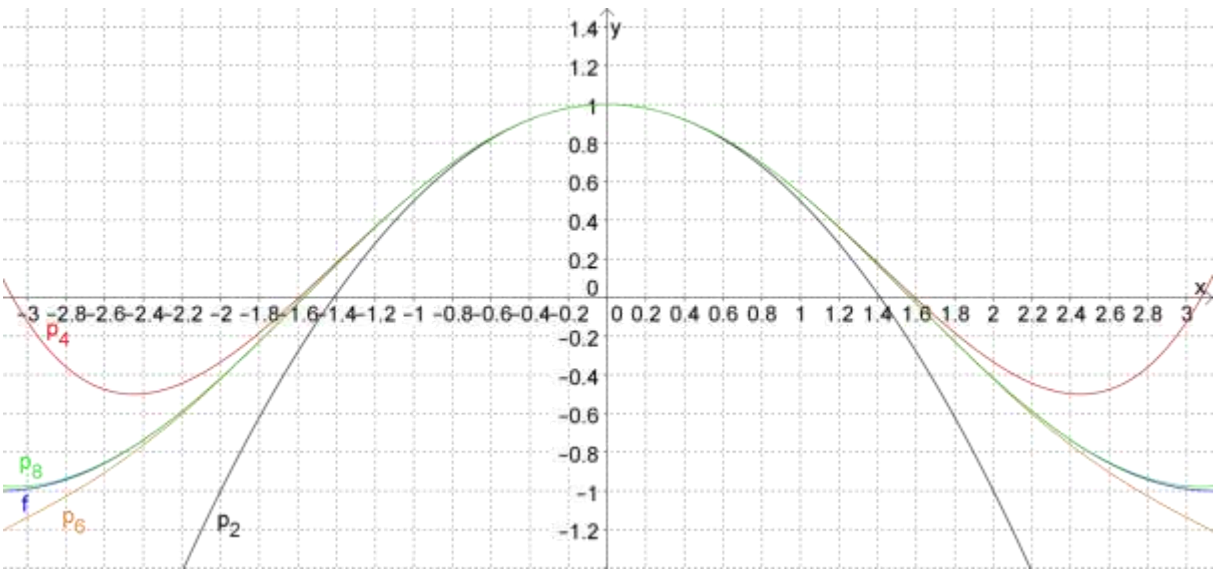
➔ $f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) \ldots = 0$

➔ $f''(0) = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) \ldots = -1$

Somit lautet die Taylorreihe für $cos\ (x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Beispiel 3: $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$

Es gilt: $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = e^x$

➔ $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

Somit lautet die Taylorreihe für e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.