

Vertiefungskurs Mathematik 12

Einstieg zum Thema „Taylorreihen“

Die Einstiegsfrage „Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte?“ führt zunächst auf die Bestimmung einer ganzrationalen Näherungsfunktion für die Sinusfunktion.

Um die Eleganz und die relativ einfache Bestimmung der Taylorpolynome (bzw. Taylorentwicklungen) den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, wurde zunächst eine Näherungsfunktion nach der, für die Schülerinnen und Schüler „üblichen“ Methode (Vorgabe von $n + 1$ Stützstellen) vorgenommen.

Die dabei auftretenden linearen Gleichungssysteme (LGS) werden mit wachsendem n immer aufwändiger zu lösen. Zudem müssen alle Koeffizienten bei jeder neuen Näherung (d.h. mit wachsendem n) neu berechnet werden.

Danach empfinden die Schülerinnen und Schüler die Methode von Taylor, bei der nur ein weiterer Koeffizient neu berechnet werden muss (die anderen Koeffizienten bleiben erhalten), als eine willkommene Erleichterung.

Bestimmung einer ganzrationalen Näherungsfunktion mithilfe von Stützstellen

Beispiel 1: Näherungsfunktion 3.Grades (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung)

$$f(x) = \sin(x)$$

Man benötigt wegen der Symmetrie nur zwei, statt vier Stützstellen.

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ und } x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ansatz: } g(x) = b \cdot x^3 + a \cdot x$$

$$\text{Bedingungen: } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = b \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{6} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = b \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Man erhält ein LGS mit zwei Gleichungen für die beiden Variablen a und b :

$$b \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$b \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad (II)$$

$$\text{Aus } (-3) \cdot (I) + (II) \text{ folgt: } b = -\frac{9}{2\pi^3}$$

$$\text{Einsetzen in (II) liefert: } a = \frac{25}{8\pi} \rightarrow g(x) = -\frac{9}{2\pi^3} \cdot x^3 + \frac{25}{8\pi} \cdot x$$

Beispiel 2: Näherungsfunktion 5.Grades (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung)

$$f(x) = \sin(x)$$

Man benötigt wegen der Symmetrie nur drei, statt sechs Stützstellen.

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2} \text{ und } x_3 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Ansatz: } h(x) = c \cdot x^5 + b \cdot x^3 + a \cdot x$$

Bedingungen: $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = c \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{6} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = c \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = c \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{5\pi}{6} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Man erhält ein LGS mit drei Gleichungen für die Variablen a, b und c:

$$c \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$c \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + a \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad (II)$$

$$c \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^5 + b \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^3 + a \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (III)$$

Aus $(-3) \cdot (I) + (II)$ und $(-5) \cdot (II) + (III)$ folgt:

$$c \cdot \frac{5}{162} \pi^5 + b \cdot \frac{1}{9} \pi^3 = -\frac{1}{2} \quad (IV)$$

$$c \cdot \frac{65}{162} \pi^5 + b \cdot \frac{5}{9} \pi^3 = -2 \quad (V)$$

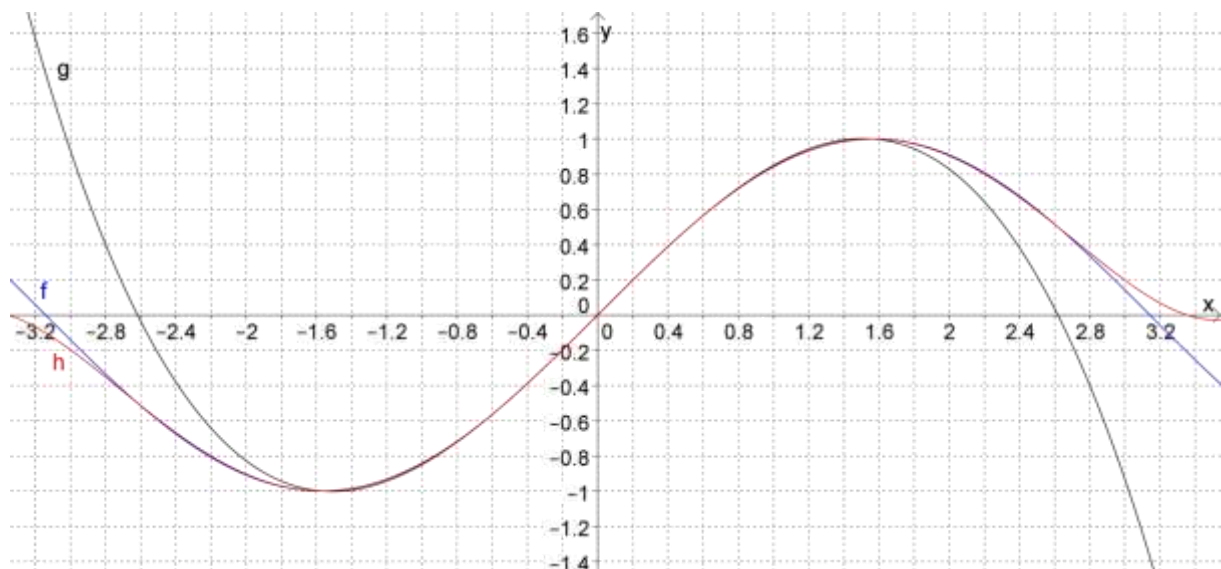
Aus $(-5) \cdot (IV) + (V)$ folgt: $c = \frac{81}{40\pi^5}$

Einsetzen in (IV) liefert: $b = -\frac{81}{16\pi^3}$

Einsetzen in (II) liefert: $a = \frac{2009}{640\pi} \quad \rightarrow \quad h(x) = \frac{81}{40\pi^5} \cdot x^5 - \frac{81}{16\pi^3} \cdot x^3 + \frac{2009}{640\pi} x$

Man sieht sofort, dass sich bei der besseren Näherung 5.Grades auch die Koeffizienten a und b verändern und jedesmal neu berechnet werden müssten.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit der beiden Näherungsfunktionen.



Um die Genauigkeit der Näherung zu veranschaulichen kann man z.B. die Funktionswerte von f und h an der Stelle $x_0 = 1$ vergleichen.

$$f(1) \approx 0,8414709848 ; h(1) \approx 0,8425384554$$

Obwohl der Graph (wegen der Skalierung) eine gute Näherung auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suggeriert, ist die Abweichung noch weit von der Rechnergenauigkeit (in der Regel 10 Dezimalen) entfernt. Schon die dritte Dezimale ist falsch.

Somit können die Schülerinnen und Schüler einigermaßen abschätzen, wie aufwändig es wäre ein LGS für eine hinreichend gute Näherungsfunktion zu lösen.

Anschließend wird den Schülerinnen und Schülern die Idee von Taylor erläutert. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass man nur eine Entwicklungsmitte x_0 verwendet, dafür aber neben dem Funktionswert auch noch die Funktionswerte mehrerer Ableitungsfunktionen von f berücksichtigt.

Um die Vorgangsweise besser zu veranschaulichen, beginnt man mit dem Taylorpolynom 1.Grades (also der Tangentenfunktion an der Stelle x_0)

$$\text{Taylorpolynom 1.Grades: } p_1(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

$$\text{Entwicklungsmitte: } x_0 = 0$$

$$\text{Bedingungen: } p_1(0) = f(0) \text{ und } p_1'(0) = f'(0)$$

$$f'(x) = \cos(x) ; p_1'(x) = a_1$$

$$p_1(0) = a_0 = 0$$

$$p_1'(0) = a_1 = 1$$

$$\rightarrow p_1(x) = x$$

$$\text{Taylorpolynom 2.Grades: } p_2(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$\text{Entwicklungsmitte: } x_0 = 0$$

$$\text{Bedingungen: } p_2(0) = f(0) \text{ und } p_2'(0) = f'(0) \text{ und } p_2''(0) = f''(0)$$

$$f''(x) = -\sin(x) ; p_2'(x) = 2a_2 \cdot x + a_1 ; p_2''(x) = 2a_2$$

$$p_2(0) = a_0 = 0$$

$$p_2'(0) = a_1 = 1$$

$$p_2''(0) = 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\rightarrow p_2(x) = x = p_1(x)$$

$$\text{Taylorpolynom 3.Grades: } p_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$\text{Entwicklungsmitte: } x_0 = 0$$

Bedingungen:

$$p_3(0) = f(0) \text{ und } p_3'(0) = f'(0) \text{ und } p_3''(0) = f''(0) \text{ und } p_3'''(0) = f'''(0)$$

$$f'''(x) = -\cos(x) ; p_3'(x) = 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1 ; p_3''(x) = 6a_3 \cdot x + 2a_2$$

$$p_3'''(x) = 6a_3$$

$$p_3(0) = a_0 = 0$$

$$p_3'(0) = a_1 = 1$$

$$p_3''(0) = 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$p_3'''(0) = 6a_3 = -1 \rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x$$

Man erkennt, dass immer nur ein neuer Koeffizient, nämlich a_n berechnet werden muss, alle anderen Koeffizienten a_i mit $i \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ bleiben gleich.

Zudem sind alle Koeffizienten mit geradem i Null, da $\sin(0) = 0$ gilt. Außerdem sind alle Koeffizienten mit $i \bmod(4) = 1$ positiv und alle Koeffizienten mit $i \bmod(4) = 3$ negativ.

Da die ungeraden Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 0$ entweder den Wert 1 oder -1 besitzen, gilt für die Koeffizienten mit ungeradem i :

$$a_i = \frac{1}{i!} \text{ für } i \bmod(4) = 1 \text{ bzw. } a_i = -\frac{1}{i!} \text{ für } i \bmod(4) = 3$$

Somit lauten weitere Taylorpolynome von f :

$$p_5(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

$$p_7(x) = -\frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

$$p_9(x) = \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

$$\text{Allgemein gilt: } p_{2k+1}(x) = (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \dots + x$$

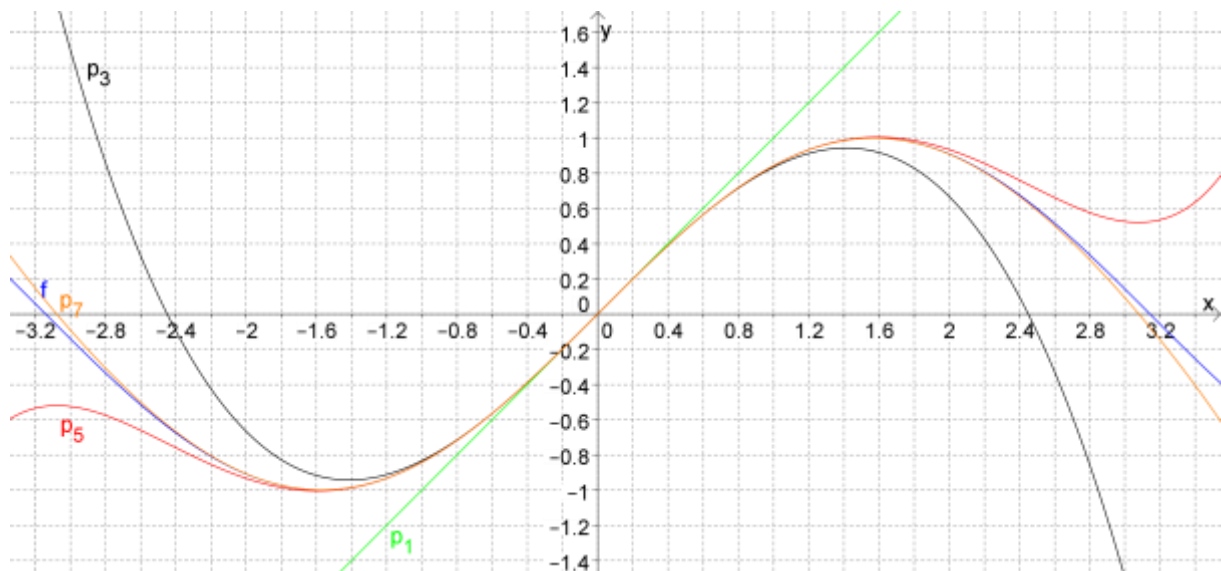
$$p_{2k+1}(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!}x^{2i+1}$$

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass man ohne großen Aufwand schnell weitere Koeffizienten und damit Taylorpolynome berechnen kann.

Dies liegt daran, dass bei der Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ nur der Koeffizient ohne x einen Beitrag zum Wert von $p_i^{(l)}(0)$ liefert ($l \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$).

Der Vorteil der Taylorpolynome gegenüber den „Stützstellenpolynomen“ ist damit klar aufgezeigt, denn ein mühseliges Lösen von sehr großen LGS entfällt.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Um die Genauigkeit der Näherung durch das Taylorpolynom p_7 zu veranschaulichen kann man z.B. die Funktionswerte von f und p_7 an der Stelle $x_0 = 1$ vergleichen.

$$f(1) \approx 0,8414709848 \quad ; \quad p_7(1) \approx 0,841468254$$

Hier stimmen schon die ersten vier Dezimalen überein. Schon das Taylorpolynom p_{13} berechnet einen Näherungswert für $f(1)$ der sich auf Rechnergenauigkeit (10 Dezimalen) nicht mehr von $f(1)$ unterscheidet.

Im weiteren Unterrichtsverlauf wird dann die Taylorreihe für $\sin(x)$ definiert, die die Funktion beliebig gut annähert und somit mit f gleichgesetzt werden kann:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$