

## 4 Integration durch Substitution der Integrationsvariablen- Erarbeitung

Das Verfahren der Integration durch Substitution lässt sich so abwandeln, dass man noch weitaus mehr Integrale berechnen kann, selbst wenn der Integrand nicht in der Form einer Ableitung einer verketteten Funktion vorliegt. Das Ziel, durch die Substitution ein „einfacheres“ Integral zu erhalten, bleibt bestehen.

### Beispiel

Versuchen Sie, das Integral  $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x + 4} dx$  mit der Substitution  $u = e^x + 4$  (1)

auf die bisherige Weise zu berechnen. Auf welches Problem stoßen Sie?

Dieses Problem lässt sich beheben, wenn es möglich ist, Gleichung (1) nach  $x$  aufzulösen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x + 4} dx \\ &= \int_5^6 \frac{e^{2\ln(u-4)}}{u} \cdot \frac{1}{u-4} du \\ &= \int_5^6 \frac{e^{\ln((u-4)^2)}}{u} \cdot \frac{1}{u-4} du \\ &= \int_5^6 \frac{(u-4)^2}{u} \cdot \frac{1}{u-4} du \\ &= \int_5^6 \frac{u-4}{u} du = \int_5^6 \left(1 - \frac{4}{u}\right) du \\ &= \left[ u - 4 \ln|u| \right]_5^6 \\ &= 1 - 4 \ln(6) + 4 \ln(5) \end{aligned}$$

Nebenrechnungen

$$\text{Subst.: } u = e^x + 4 \quad | -4 \quad (\text{A})$$

$$u - 4 = e^x \quad | \ln(\dots)$$

$$x = \ln(u - 4) \quad (\text{B})$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{u-4}$$

$$dx = \frac{1}{u-4} du$$

$$\text{Grenzen: } u_1 = e^0 + 4 = 5$$

$$u_2 = e^{\ln(2)} + 4 = 6$$

### Notwendige Überlegungen beim Lösen:

- (A) Welche Eigenschaft muss die Funktion  $u$  haben, damit sich beim Auflösen nach  $x$  wieder eine Funktion – die Funktion  $x$  mit dem Funktionsterm  $x(u)$  – ergibt?

Falls diese Eigenschaft nicht auf dem maximalen Definitionsbereich von  $u$  gegeben ist: Gilt sie, wenn man den Definitionsbereich auf das Integrationsintervall beschränkt? Was müsste man z.B. bei der Funktion  $u = x^2$  beachten?

- (B) Welche Eigenschaft muss zusätzlich gegeben sein, damit der nächste Schritt ausgeführt werden kann? Was müsste man z.B. bei der Funktion  $u = x^3$  beachten?  
Wenn diese Eigenschaft nicht im maximalen Definitionsbereich gilt, muss man prüfen, ob dies wenigstens im Integrationsintervall gilt.

Gehen Sie die linke Seite der obigen Lösung durch und notieren Sie sich die angewandten „Tricks“.

## 4 Integration durch Substitution der Integrationsvariablen – Anwendung und Aufgaben

Das Finden einer geeigneten Substitution ist manchmal schwierig!

1. In Aufgabe 1 ist eine geeignete Substitution angegeben. Beobachten Sie, welche Auswirkungen die jeweilige Substitution hat, um dies in späteren Aufgaben anwenden zu können.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$  mit  $u=1+\sqrt{x}$

b)  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x+4} dx$  mit  $u=x+2$

c)  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x(1-\ln x)} dx$  mit  $u=1-\ln x$

2. In Aufgabe 2 substituieren Sie die Summe/Differenz im Nenner. Anschließend dividieren Sie den Term im Zähler summandenweise durch  $u$  (siehe Einstiegsbeispiel!).

a)  $\int_0^2 \frac{x}{3-x} dx$

b)  $\int_1^{16} \frac{6}{2+\sqrt{x}} dx$

c)  $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

3. In Aufgabe 3 substituieren Sie die Summe/Differenz unter der Wurzel bzw. in der Klammer.

a)  $\int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{(e^x-2)^2} dx$

b)  $\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$

c)  $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$

4. In Aufgabe 4 verwenden Sie die **trigonometrische Substitution**:

Auf Terme der Form  $a^2 - x^2$  wird die Substitution  $u = \arcsin\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$  angewandt. Diese formt

man nach  $x$  um:  $x = a \cdot \sin(u)$ , setzt sie ein und wendet den trigonometrischen Pythagoras an:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2(u) = a^2(1 - \sin^2(u)) = a^2 \cdot \cos^2(u) .$$

Anschließend wird die partielle Integration verwendet.

a)  $\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$