# 4 Integration durch Substitution der Integrationsvariablen– Erarbeitung

Das Verfahren der Integration durch Substitution lässt sich so abwandeln, dass man noch weitaus mehr Integrale berechnen kann, selbst wenn der Integrand nicht in der Form einer Ableitung einer verketteten Funktion vorliegt. Das Ziel, durch die Substitution ein „einfacheres" Integral zu erhalten, bleibt bestehen.

**Beispiel**

Versuchen Sie, das Integral $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,dx$ mit der Substitution $u=e^x+4$ (1)

auf die bisherige Weise zu berechnen.

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,dx$$
$$=\int_5^6 \frac{e^x}{u}\,du \quad ↯$$

Subst.: $u=e^x+4$

$$\frac{du}{dx}=e^x$$
$$du=e^x dx$$

Auf welches Problem stoßen Sie? Man kann die Substitution nicht durchführen, weil der Integrand nicht aus einer verketteten Funktion multipliziert mit ihrer inneren Ableitung besteht.

Dieses Problem lässt sich beheben, wenn es möglich ist, Gleichung (1) nach x aufzulösen:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,dx$$
$$=\int_5^6 \frac{e^{2\ln(u-4)}}{u}\cdot\frac{1}{u-4}\,du$$
$$=\int_5^6 \frac{e^{\ln\left((u-4)^2\right)}}{u}\,\frac{1}{u-4}\,du$$
$$=\int_5^6 \frac{(u-4)^2}{u}\cdot\frac{1}{u-4}\,du$$
$$=\int_5^6 \frac{u-4}{u}\,du=\int_5^6 1-\frac{4}{u}\,du$$
$$=\left[u-4\ln|u|\right]_5^6$$
$$=1-4\ln(6)+4\ln(5)$$

Nebenrechnungen

Subst.: $u=e^x+4 \quad |-4$ (A)

$u-4=e^x \quad |\ln(\ldots)$

$x=\ln(u-4)$ (B)

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{u-4}$$
$$dx=\frac{1}{u-4}\,du$$

Grenzen: $u_1=e^0+4=5$

$u_2=e^{\ln(2)}+4=6$

**Notwendige Überlegungen beim Lösen:**

(A) Welche Eigenschaft muss die Funktion u haben, damit sich beim Auflösen nach x wieder eine Funktion – die Funktion x mit dem Funktionsterm x(u) – ergibt?
Die Funktion u muss umkehrbar sein.
ODER: Die Zuordnung $x \mapsto u(x)$ muss in beiden Richtungen eindeutig sein.

Falls diese Eigenschaft nicht auf dem maximalen Definitionsbereich von u gegeben ist: Gilt sie, wenn man den Definitionsbereich auf das Integrationsintervall beschränkt? Was müsste man z.B. bei der Funktion $u=x^2$ beachten?
Wenn das Integrationsintervall ein Teilintervall von $[0;\infty)$ oder $(-\infty;0]$ ist, ist die Funktion umkehrbar, sonst nicht.

(B) Welche Eigenschaft muss zusätzlich gegeben sein, damit der nächste Schritt ausgeführt werden kann?
Man muss die Ableitung $x'(u)$ bilden können.

Was müsste man z.B. bei der Funktion $u=x^3$ beachten?
$u'(0)=0$, also wäre die Ableitung der Umkehrfunktion $x(u)$ für u=0 unendlich. Das darf nicht sein. Also darf 0 nicht im Integrationsintervall liegen.
Wenn diese Eigenschaft nicht im maximalen Definitionsbereich gilt, muss man prüfen, ob dies wenigstens im Integrationsintervall gilt.

Gehen Sie die linke Seite der obigen Lösung durch und notieren Sie sich die angewandten „Tricks“.
Auflösen von $e^{2\ln(u-4)}$ mithilfe von Logarithmus- und Potenzgesetzen
Den entstandenen Bruch so umformen, bis man nur noch u im Nenner hat, dann mit u kürzen.

## 4 Integration durch Substitution der Integrationsvariablen – Anwendung und Aufgaben

Das Finden einer geeigneten Substitution ist manchmal schwierig!

1. In Aufgabe 1 ist eine geeignete Substitution angegeben. Beobachten Sie, welche Auswirkungen die jeweilige Substitution hat, um dies in späteren Aufgaben anwenden zu können.

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{u}\cdot 2(u-1)du = \left[2u-2\ln|u|\right]_1^2 = 2-2\ln 2$

mit $u=1+\sqrt{x}$; $x=(u-1)^2; \frac{dx}{du}=2(u-1)$

b) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x+4}dx = \int_3^4 \frac{u-1}{u^2}du = \left[\ln|u|+\frac{1}{u}\right]_3^4 = \ln 4-\ln 3-\frac{1}{12}$

mit $u=x+2$; $x=u-2; \frac{dx}{du}=1$

c) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x(1-\ln x)}dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-n}{e^{1-n}\cdot n}\cdot\left(-e^{1-n}\right)du = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{u}+1du = \left[-\ln|u|+u\right]_1^{\frac{1}{2}} = \ln 2-\frac{1}{2}$

mit $u=1-\ln x$; $x=e^{1-u}; \frac{dx}{du}=-e^{1-u}$

2. In Aufgabe 2 substituieren Sie die Summe/Differenz im Nenner. Anschließend dividieren Sie den Term im Zähler summandenweise durch u (siehe Einstiegsbeispiel!).

a) $\int_0^2 \frac{x}{3-x}dx = \int_3^1 \frac{3-u}{u}\cdot(-1)du = \left[-3\ln|u|+u\right]_3^1 = 3\ln 3-2$

mit $u=3-x; x=3-u; \frac{dx}{du}=-1$

b) $\int_1^{16} \frac{6}{2+\sqrt{x}}dx = \int_3^6 \frac{6}{u}\cdot 2(u-2)du = \left[12-24\ln|u|\right]_3^6 = 36-24\ln 2$

mit $u=2+\sqrt{x}; x=(u-2)^2; \frac{dx}{du}=2(u-2)du$

c) $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int_3^4 \frac{1-(u-1)}{u}\cdot 2(u-1)du = \left[u^2+6u-4\ln|u|\right]_3^4 = -1-4\ln 4+4\ln 3$

mit $u=1+\sqrt{x}; x=(u-1)^2; \frac{dx}{du}=2(u-1)du$

3. In Aufgabe 3 substituieren Sie die Summe/Differenz unter der Wurzel bzw. in der Klammer.

a) $\int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{(e^x-2)^2}dx = \int_2^3 \frac{(u+2)^2}{u^2}\cdot\frac{1}{u+2}du = \left[\ln|u|-\frac{2}{u}\right]_2^3 = \ln 3-\ln 2+\frac{1}{3}$

mit $u=e^x-2; x=\ln(u+2); \frac{dx}{du}=\frac{1}{u+2}$

b) $\int_4^{12} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_9^{25} \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2}du = \left[\frac{1}{6}\sqrt{u}^3-\frac{1}{2}\sqrt{u}\right]_9^{25} = \frac{46}{3}$

mit $u=2x+1; x=\frac{1}{2}(u-1); \frac{dx}{du}=\frac{1}{2}$

c) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int_9^4 \frac{\sqrt{9-u}^3}{\sqrt{u}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{9-u}}du = \left[-9\sqrt{u}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^4 = \frac{8}{3}$

mit $u=9-x^2; x=\sqrt{9-u}; \frac{dx}{du}=\frac{-1}{2\sqrt{9-u}}$

4. In Aufgabe 4 verwenden Sie die **trigonometrische Substitution:**

Auf Terme der Form $a^2-x^2$ wird die Substitution $u=\arcsin\left(\frac{1}{a}\cdot x\right)$ angewandt. Diese formt man nach x um: $x=a\cdot\sin(u)$, setzt sie ein und wendet den trigonometrischen Pythagoras an:

$$a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2(u)=a^2\left(1-\sin^2(u)\right)=a^2\cdot\cos^2(u)\quad.$$

Anschließend wird die partielle Integration verwendet.

a) $$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\cos(u)\,du = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u)\,du}_{=A}$$

$$= \left[\sin(u)\cdot\cos(u)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2(u)\,du = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u)\,du}_{=A}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2(u)}{\sqrt{4\cos^2(u)}}\cdot 2\cos(u)\,du = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2(u)\,du}_{=A}$$

$$= \left[-\cos(u)\cdot 4\sin(u)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -4\cos^2(u)\,du = -\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2(u)\,du}_{=A}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$