3 Integration durch Substitution – Erarbeitung

Herleitung

Aus der Kettenregel lässt sich die **Integration durch Substitution** herleiten.
Es sei F eine Stammfunktion der Funktion f, und g sei eine differenzierbare Funktion. Man bildet die Funktion H mit $H(x)=F(g(x))$.

Für die Ableitungsfunktion $H'=h$ gilt dann nach der Kettenregel:

$$h(x)=H'(x)=F'(g(x))\cdot g'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

Somit kann man das Integral über $h(x)$ folgendermaßen berechnen

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx=\left[F(g(x))\right]_a^b=F(g(b))-F(g(a)) \qquad (1)$$

Die zuletzt entstandene Differenz kann man sich auch entstanden denken aus:

$$F(g(b))-F(g(a))=\left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)}=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad (2)$$

Hierbei wurde folgende Substitution angewendet: $u = g(x)$

Ziel der Integration durch Substitution ist es, ohne „Umweg" über die Stammfunktion direkt aus dem „komplizierten" Integral in (1) das „einfachere" Integral in (2) zu bilden.

Beispiel

$\int_0^1 (2x^2+1)^3\cdot 4x\,dx$ Überlegungen:

$g(x)=2x^2+1$	$f(u)=u^3$
$g'(x)=4x$	Grenzen: $u_1=g(a)=1$
Subst.: $u=2x^2+1$	$u_2=g(b)=3$

Damit erhält man nach (2) das einfache Integral:

$$\int_1^3 u^3du$$

Formale Notation

Für die Substitution verwendet man die von Leibniz 1675 entwickelte Schreibweise für die Ableitung:
Setzt man $u=g(x)$, so bezeichnet man die Ableitung von u bzw. g an der Stelle x mit $g'(x)=\frac{du}{dx}$.
Dabei nennt man du und dx Differenziale und mit diesen „rechnet" man so:

$$\int_0^1 (2x^2+1)^3\cdot 4x\,dx$$
$$=\int_1^3 u^3du$$
$$=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_1^3$$
$$=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20$$

Nebenrechnungen

Subst.: $u=2x^2+1$

$\frac{du}{dx}=4x \quad |\cdot dx$

$du=4x\,dx$

Grenzen: $u_1=2\cdot 0^2+1=1$

$u_2=2\cdot 1^2+1=3$

3 Integration durch Substitution – Anwendung

1. Die Integration durch Substitution kann direkt angewandt werden, wenn der Integrand aus dem Produkt einer verketteten Funktion mit ihrer inneren Ableitung besteht. Lösen Sie damit die Aufgabe 1.

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad \text{mit}$$

der Substitution $u = g(x)$

2. Häufig „fehlt" der inneren Ableitung der passende Vorfaktor. In diesem Fall kann man so vorgehen:

Bsp.: $\int_1^2 x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin(u)\cdot\frac{1}{\pi}du$

$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(u)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$

$= -\frac{1}{\pi}\cos(2\pi) + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}$

Nebenrechnungen

Subst.: $u = \frac{\pi}{2}x^2$

$\frac{du}{dx} = \pi x \quad |\cdot dx$

$du = \pi x dx \quad |:\pi$

$\frac{1}{\pi}du = xdx$

Grenzen: $u_1 = \frac{\pi}{2}\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$

$u_2 = \frac{\pi}{2}\cdot 2^2 = 2\pi$

Lösen Sie damit die Aufgabe 2. Hier ist die Substitution jeweils angegeben.

3. In Aufgabe 3 ist die Substitution nicht angegeben.
Um diese zu finden, suchen Sie einen Teil des Integranden, der als innere Funktion einer verketteten Funktion dient und dessen Ableitung **bis auf einen Vorfaktor** als zweiter Faktor der Funktion im Integranden steht.

Beispiel: $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$ Subst.: $u = 9+x^2$; $\frac{du}{dx} = 2\cdot x$

4. Die Integration durch **lineare Substitution** und die **logarithmische Integration** sind Spezialfälle der Integration durch Substitution. Berechnen Sie die beiden folgenden Integrale je einmal mit der Formel des Spezialfalls und einmal in der Notation der Substitution. Welchen Rechenweg bevorzugen Sie?

a) $\int_{2,5}^{5} \sqrt{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{2,5}^{5} = \frac{19}{3}$ (Lineare Substitution)

$\int_{2,5}^{5} \sqrt{2x-1}dx = \int_4^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \frac{19}{3}$; Subst.: $u = 2x-1$; $\frac{dx}{du} = 2$; $u_1 = 4; u_2 = 9$

b) $$\int_0^{\ln(0,5)} \frac{e^{2x}}{4-e^{2x}}\,dx = \int_0^{\ln(0,5)} -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2e^{2x}}{4-e^{2x}}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(4-e^{2x}\right)\right]_0^{\ln(0,5)} = -\frac{1}{2}\ln\left(4-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln(3)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(5)+\ln(2) \quad \text{(Logarithmische Substitution)}$$

$$\int_0^{\ln(0,5)} \frac{e^{2x}}{4-e^{2x}}\,dx = \int_3^{\frac{15}{4}} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\,du = \left[-\frac{1}{2}\ln(u)\right]_3^{\frac{15}{4}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(5)+\ln(2)$$

$$\text{Subst.: } u=4-e^{2x}\,;\ \frac{du}{dx}=-2e^{2x}\,;\ u_1=3\,;\ u_2=\frac{15}{4}$$

5. Die Integrale in Aufgabe 4 kann man auf verschiedenen Wegen lösen: sowohl mit der Integration durch Substitution, als auch mit der partiellen Integration.
   Versuchen Sie beide Wege.

3 Integration durch Substitution – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Integrale.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int_0^1 3u\,du = \left[\frac{3}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

Subst.: $u = \sin(x); \frac{du}{dx} = \cos(x); u_1 = 0; u_2 = 1$

b) $\int_0^{14} \frac{1}{4+x^2}\cdot 2x\,dx = \int_4^{200} \frac{1}{u}\,du = \left[\ln(u)\right]_4^{200} = \ln(200) - \ln(4) = 2\ln(10) - \ln(2)$

Subst.: $u = 4 + x^2$; $\frac{du}{dx} = 2x; u_1 = 4; u_2 = 200$

c) $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+1}\,dx = \int_1^2 e^u\,du = \left[e^u\right]_1^2 = e^2 - e$

Subst.: $u = x^3 + 1; \frac{du}{dx} = 3x^2; u_1 = 1; u_2 = 2$

2. Berechnen Sie die Integrale mit der angegebenen Substitution.

a) $\int_{-1}^2 x\left(1+x^2\right)^3 dx = \int_2^5 \frac{1}{2}u^3\,du = \left[\frac{1}{8}u^4\right]_2^5 = \frac{609}{8}$

mit $u = 1 + x^2$; $\frac{du}{dx} = 2x; u_1 = 2; u_2 = 5$

b) $\int_{-1}^1 \frac{-2x}{\left(4-3x^2\right)^2}\,dx = \int_1^1 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^2}\,du = 0$

mit $u = 4 - 3x^2$; $\frac{du}{dx} = -6x; u_1 = 1; u_2 = 1$

c) $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x}}\,dx = \int_9^{24} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\frac{1}{3}\sqrt{u}\right]_9^{24} = \frac{2}{3}\sqrt{6} - 1$

mit $u = 3x^2 + 6x$; $\frac{du}{dx} = 6x + 6; u_1 = 9; u_2 = 24$

d) $\int_1^e x^3 \ln\left(x^4\right)dx = \int_1^{e^4} \frac{1}{4}\ln(u)\,du = \left[\frac{1}{4}\left(u\cdot\ln(u) - u\right)\right]_1^{e^4} = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}$

mit $u = x^4$; $\frac{du}{dx} = 4x^3; u_1 = 1; u_2 = e^4$

3. Finden Sie jeweils eine geeignete Substitution und berechnen Sie die Integrale.

a) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_9^{25} = 2$; Subst.: $u = 9 + x^2; \frac{du}{dx} = 2x; u_1 = 9; u_2 = 25$

b) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^{-1} -\frac{1}{2}e^u du = \left[-\frac{1}{2}e^u\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$;

Subst.: $u=-x^2; \frac{du}{dx}=-2x; u_1=0; u_2=-1$

c) $\int_0^{\ln 4} \frac{2e^x}{\sqrt{5-e^x}}dx = \int_4^1 \frac{-2}{\sqrt{u}}du = \left[-4\sqrt{u}\right]_4^1 = 4$; Subst.: $u=5-e^x; \frac{du}{dx}=-e^x; u_1=4; u_2=1$

d) $\int_1^{2e} \frac{(1+\ln(x))^2}{3x}dx = \int_1^{\ln(2)+2} \frac{1}{3}u^2 du = \left[\frac{1}{9}u^3\right]_1^{\ln(2)+2} = \frac{1}{9}(\ln(2)+2)^3 - \frac{1}{9}$;

Subst.: $u=1+\ln(x); \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}; u_1=1; u_2=\ln(2)+2$

e) $\int_2^4 \sqrt{x^2(20-x^2)}dx = \int_2^4 x\sqrt{20-x^2}\,dx = \int_{16}^4 -\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^4 = \frac{56}{3}$

Subst.: $u=20-x^2; \frac{du}{dx}=-2x; u_1=16; u_2=4$

f) $\int_1^2 \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}dx = \int_1^2 e^x\sqrt{e^x+1}\,dx = \int_{e+1}^{e^2+1} \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{e+1}^{e^2+1} = \frac{2}{3}\left((e^2+1)^{\frac{3}{2}} - (e+1)^{\frac{3}{2}}\right)$;

Subst.: $u=e^x+1; \frac{du}{dx}=e^x; u_1=e+1; u_2=e^2+1$

4. Berechnen Sie die Integrale mithilfe zweier verschiedener Methoden.

a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln(x)dx$

Mit partieller Integration:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln(x)dx = \left[(\ln(x))^2\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln(x)dx = \frac{1}{2}\left((\ln(e^2))^2 - (\ln(e))^2\right) = \frac{3}{2}$$

Mit Substitution:

$$u=\ln(x); \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}; u_1=1; u_2=2$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln(x)dx = \int_1^2 u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin(x))^2\cdot\cos(x)dx$

Mit partieller Integration:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin(x))^2\cos(x)dx = \left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\cdot\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\cdot\sin(x)dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 \cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

Mit Substitution: $u = \sin(x); \frac{du}{dx} = \cos(x); u_1 = -1; u_2 = 1$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 \cdot \cos(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}u^2\,du = \left[\frac{1}{6}u^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$