Integration durch lineare Substitution und Logarithmische Integration – Erarbeitung

Aus der **Kettenregel** lassen sich mehrere **Integrationsregeln** herleiten.

1. Die Funktion f im Integranden sei eine verkettete Funktion, wobei die innere Funktion linear sei: $f(x)=g(h(x))$ mit $h(x)=mx+c$. Füllen Sie die Tabelle aus.

Funktion f	$f(x)=\sin(2x)$	$f(x)=(2x-4)^3$	$f(x)=g(mx+c)$ (*)
Ableitung f'	$f'(x)=2\cos(2x)$	$f'(x)=3\cdot 2(2x-4)^2$	$f'(x)=m\cdot g'(mx+c)$
Stammfunktion F	$F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x-4)^4$	$F(x)=\frac{1}{m}\cdot G(mx+c)$
Integral (Beispiel)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)dx$ $=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$ $=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$	$\int_2^3(2x-4)^3\,dx$ $=\left[\frac{1}{8}(2x-4)^4\right]_2^3$ $=\frac{1}{8}\cdot 16-\frac{1}{8}\cdot 0=2$	$\int_a^b g(mx+c)dx$ $=\left[\frac{1}{m}\cdot G(mx+c)\right]_a^b$

(*) Die Stammfunktion der Funktion g sei G und es gelte $m\neq 0$.

2. Leiten Sie die gegebenen Funktionen mit der Kettenregel ab und schreiben Sie den Term der Ableitungsfunktion als Bruch.
(Die Definitionsmengen seien so gewählt, dass der Term im Argument des ln positiv ist.)

Funktion f	$f(x)=\ln(x^2+3x)$	$f(x)=\ln(\sin(2x))$	$f(x)=\ln(g(x))$
Ableitung f'	$f'(x)=\frac{1}{x^2+3x}\cdot(2x+3)$ $=\frac{2x+3}{x^2+3x}$	$f'(x)=\frac{1}{\sin(2x)}\cdot 2\cos(2x)$ $=\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$	$f'(x)=\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$ $=\frac{g'(x)}{g(x)}$

Finden Sie zu den gegebenen Funktionen f je eine Stammfunktion, kontrollieren Sie durch Ableiten und formulieren Sie eine Regel.

Funktion f	$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$	$f(x)=\frac{6e^{2x}}{5+3e^{2x}}$	$f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$
Stammfunktion F	$F(x)=\ln(1+x^2)$	$F(x)=\ln(5+3e^{2x})$	$F(x)=\ln(g(x))$

Hier wurden nur Fälle betrachtet, in denen der Nenner positiv war. Für den allgemeinen Fall brauchen wir die Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ auch für $x<0$. Stellen Sie eine Vermutung für diese Stammfunktion auf, überprüfen Sie sie durch Ableiten und verbessern Sie Ihre Regel.

Vermutung: Für $f(x)=\frac{1}{x}$ mit $x<0$ gilt $F(x)=\ln(|x|)$.

Prüfen: $F(x)=\ln(-x)$ für $x<0$

$$F'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}=f(x)$$

Verbesserte Regel:

Die Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ ist $F(x)=\ln(|g(x)|)$, falls $g(x)\neq 0$.

Integration durch lineare Substitution und Logarithmische Integration – Aufgaben

Integration durch lineare Substitution:	$\int_a^b g(mx+c)\,dx = \left[\frac{1}{m}G(mx+c)\right]_a^b$; $m \neq 0$
Logarithmische Integration:	$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \left[\ln\lvert g(x)\rvert\right]_a^b$; $g(x) \neq 0$ für $x \in [a;b]$

1. Berechnen Sie die Integrale mithilfe linearer Substitution.

   a) $\int_0^1 3e^{2x-1}\,dx = \frac{3e}{2} - \frac{3}{2e}$

   b) $\int_1^2 (3-2x)^2\,dx = \frac{1}{3}$

   c) $\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{13}{3}$

   d) $\int_0^3 \frac{6}{2x+5}\,dx = 3\ln(11) - 3\ln(5)$

   e) $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} 3\cos(\pi x)\,dx = \frac{3}{\pi}$

   f) $\int_4^{10} \ln\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)dx = \left[(x-1)\cdot\ln\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-(x-1)\right]_4^{10} = 9\ln(3) - 6$

2. Berechnen Sie die Integrale mithilfe logarithmischer Substitution.

   a) $\int_0^1 \frac{2e^x}{2e^x+1}\,dx = \ln(2e+1) - \ln(3)$

   b) $\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \ln(11) - \ln(6)$

   c) $\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x\cdot\ln(x)}\,dx = \ln(4) - \ln(2)$

3. Häufig „fehlt“ ein konstanter Faktor, um im Zähler die Ableitung des Terms im Nenner zu haben. Dieser wird auf folgende Weise ergänzt:

   Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{1-8x^3} = -\frac{1}{24}\cdot\frac{-24x^2}{1-8x^3}$

   Berechnen Sie die Integrale auf diese Weise.

   a) $\int_0^4 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ln(20) - \frac{1}{2}\ln(4)$

b) $\int_1^2 \frac{x^2}{1-8x^3}dx = \left[-\frac{1}{24}\cdot\ln\left(\left|1-8x^3\right|\right)\right]_1^2 = -\frac{1}{24}\ln(63)+\frac{1}{24}\ln(7)$

c) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{-\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}dx = \left[\frac{1}{\pi}\ln(\cos(\pi x))\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4. Beim Angeben von Endergebnissen sollten Logarithmen möglichst zusammengefasst werden.

Beispiel: $\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\ln(2)=\ln(4)-\ln(3)-\ln(2)=\ln(2^2)-\ln(3)-\ln(2)$

$=2\ln(2)-\ln(3)-\ln(2)=\ln(2)-\ln(3)$

Logarithmengesetze

$\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

$\log\left(a^b\right)=b\cdot\log(a)$

a) Vereinfachen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 2c), 3.

Zu 2c) $\ldots=\ln(2)$

Zu 3a) $\ldots=\frac{1}{2}\ln(5)$

Zu 3b) $\ldots=-\frac{1}{12}\ln(3)$

Zu 3c) $\ldots=-\frac{\ln(2)}{\pi}$

b) Berechnen Sie $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x-e^{-x}}{2e^x+2e^{-x}}dx$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.

$\ldots=\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$