1 Partielle Integration – Erarbeitung

Herleitung

Im Folgenden soll aus der **Produktregel** eine **Integrationsregel** hergeleitet werden, mit der viele Integrale über ein Produkt von Funktionen berechnet werden können.

Eine differenzierbare Funktion f lasse sich als Produkt zweier Funktionen u und v schreiben:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad (1)$$

Notieren Sie die Ableitung von f : $f'(x) =$ ________________________________ (2)

Falls u und v auf dem Intervall $[a;b]$ differenzierbar und ihre Ableitungen stetig sind, so kann man die Funktion f' auf diesem Intervall integrieren:

Die Stammfunktion von f' ist laut (1) ein Produkt von Funktionen. Setzen Sie dieses ein.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \qquad (3)$$

Setzen Sie (2) in das Integral ein: $\int_a^b f'(x)\,dx =$ ________________________________

Schreiben Sie im letzten Schritt das Integral über der Summe als Summe von zwei Integralen.

(Warum darf man das?) $\int_a^b f'(x)\,dx =$ ________________________________ (4)

Setzen Sie (3) und (4) gleich: ____ (5)

Falls man auf der einen Seite eines der beiden Integrale berechnen kann, so bringt man dieses auf die andere Seite. So hat man für das andere, bislang nicht berechenbare Integral eine Lösungs-möglichkeit gefunden.

Beispiel

Wir suchen eine Möglichkeit, das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cdot \cos(x)\,dx$ zu berechnen. Führen Sie dazu die obigen Schritte mit der Funktion f mit $f(x) = (2x+1) \cdot \sin(x)$ aus. Verwenden Sie als Integrations-intervall $[a;b] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Nach Schritt (5) sollten Sie eine Möglichkeit haben, das gesuchte Integral zu berechnen.

1 Partielle Integration – Anwendung

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

1. $\int_0^4 2x\cdot e^x\,dx$

   Markieren Sie in der Formel alle Ableitungen. Um die Formel anzuwenden, muss man entscheiden, welchen Faktor des Integranden man für $u'(x)$ bzw. für $v(x)$ einsetzt.

   Probieren Sie für das gegebene Integral beides aus und formulieren Sie ein Kriterium.
   Lösen Sie damit die Aufgabe 1.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin(x)\,dx$

   Ist der eine Faktor des Integranden eine ganzrationale Funktion vom Grad n, so muss man die partielle Integration n mal durchführen, bis die Ableitung dieses Faktors eine Konstante ist. Führen Sie dies für das gegebene Integral durch.
   Dabei ist darauf zu achten, dass immer derselbe Faktor abgeleitet wird. Probieren Sie aus, was passiert, wenn man im zweiten Schritt die Faktoren vertauscht.
   Lösen Sie damit die Aufgabe 2.

3. Bestimmen Sie die Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\ln(x)$ auf folgende Weise:

   $\int_a^b \ln(x)\,dx = \int_a^b 1\cdot\ln(x)\,dx$ mit $u'(x)=1$ und $v(x)=\ln(x)$.

   Merke: $\boxed{\text{Eine Stammfunktion F der Funktion f mit } f(x)=\ln(x) \text{ ist } F(x)=\qquad}$

   Beim Lösen haben Sie bemerkt, dass ln(x) manchmal ein „guter Kandidat" für die Wahl des Faktors v(x) sein kann! Lösen Sie damit die Aufgabe 3.

4. Ein häufig anwendbarer „Trick" bei **trigonometrischen Funktionen** im Integranden ist folgender:

   Bsp: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\cdot\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$

   (Prüfen Sie dies nach!)
   Nun hat man dasselbe Integral auf beiden Seiten der Gleichung stehen und kann nach diesem auflösen. Ersetzen Sie das Integral durch die Variable A, addieren Sie A auf beiden Seiten der Gleichung und dividieren Sie durch 2. Rechnen Sie zu Ende.

   Häufig braucht man den **trigonometrischen Pythagoras**, bevor man diesen Trick anwenden kann: $\boxed{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}$
   Leiten Sie diese Formel mithilfe einer Skizze her. (Tipp: x ist das Bogenmaß am Einheitskreis.)
   Lösen Sie damit die Aufgabe 4.

1 Partielle Integration – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Integrale mithilfe partieller Integration.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\cdot\sin(x)\,dx$

b) $\int_0^3 \frac{2}{3}x\cdot e^{2x}\,dx$

c) $\int_0^4 x\cdot(x-2)^5\,dx$

d) $\int_0^{\pi} 4x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} (2x+3)\cos(x)\,dx$

f) $\int_1^{2,5} 3x\cdot\sqrt{2x-1}\,dx$

2. Berechnen Sie die Integrale durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration

a) $\int_0^2 3x^2\cdot e^x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

c) $\int_0^{2,5} x^2\cdot(2x-5)^4\,dx$

d) $\int_0^1 e^{-x}(x-1)^2\,dx$

e) $\int_0^2 21x^2\cdot\sqrt{1-0,5x}\,dx$

3. Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f(x)=2x\cdot\ln(x)$

b) $f(x)=x^2\cdot\ln(x)$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)$

4. Berechnen Sie die Integrale.

a) $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$

b) $\int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot\sin(x)\,dx$