Vertiefungskurs Mathematik

Integration durch Substitution

Die Integration durch Substitution basiert auf der Kettenregel. Für eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion f und eine differenzierbare Funktion g mit stetiger Ableitung g' gilt:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Dies lässt sich nachvollziehen, wenn man eine Verkettung der Stammfunktion F von f mit g bildet und diese ableitet: $\left(F(g(x))\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$. Integriert man dies auf dem Intervall $[a;b]$, so erhält man:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

mit der Substitution $u = g(x)$. Ziel der Integration durch Substitution ist es, ohne Kenntnis von F von dem „schwierigen" Integral links auf das „einfache" Integral rechts zu kommen. Dies ist immer dann möglich, wenn der Integrand links aus dem Produkt einer verketteten Funktion und der Ableitung der inneren Funktion – bis auf einen Vorfaktor – besteht.

Es erfordert für Schüler/innen einiges an Übung, dies zu „sehen", deshalb gibt es für die Substitution eine formale Notation mit der von Leibniz 1675 entwickelten Schreibweise der Differenziale. Hierfür fasst man die innere Funktion $g(x)$ direkt als Funktion u in Abhängigkeit von x auf und schreibt für ihre Ableitung $\frac{du}{dx}$. Dann wird die Substitution so notiert:

$$\int_a^b \left(f(u(x))\cdot \frac{du}{dx} \right) dx = \int_a^b f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \ ,$$

wobei mit der Substitution $u = u(x)$ gleichzeitig formal die Differenziale dx gekürzt und die Grenzen ersetzt werden. Für Schüler/innen „passiert" in dieser Schreibweise „zu viel auf einmal", deshalb wird auf den Arbeitsblättern eine Schreibweise mit „Nebenrechnungen" eingeführt, in denen nacheinander alles, was eingesetzt werden muss, aufgelistet ist. Es empfiehlt sich, dieses Blatt in Farbe auszudrucken, da so die Entsprechungen noch deutlicher werden. Die meisten Schülerinnen und Schüler werden die Schreibweise mit den parallel geführten Nebenrechnungen so beibehalten.

Im Unterrichtsgang wird vor der Einführung der allgemeinen Substitution zunächst die **Integration durch lineare Substitution** wiederholt, weil dies eine Anknüpfung an den zu diesem Zeitpunkt bereits behandelten Abiturstoff darstellt. Dann wird der Spezialfall $\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \left[\ln|g(x)|\right]_a^b$ behandelt **(logarithmische Integration)**, mit der Verallgemeinerung, dass $g'(x)$ bis auf einen konstanten Faktor vorhanden ist. Dies hilft den Schülern/innen, es auch später in Funktionstermen zu erkennen, wenn ein Teil des Funktionsterms die Ableitung eines anderen Teils darstellt.

In der letzten Aufgabe dieses Arbeitsblattes werden die Logarithmengesetze aufgelistet. Schulstoff ist derzeit nur das dritte Gesetz $\log(a^b) = b\cdot\log(a)$, die beiden ersten sind dem Kurs möglicherweise noch nicht bekannt. Man kann die beiden ersten Gesetze entweder herleiten oder mitteilen, oder ganz auf die Aufgabe 4 verzichten. Es ist üblich, Ergebnisse von Rechnungen so weit zu vereinfachen, dass im Argument des Logarithmus ganze Zahlen stehen und gleichartige Logarithmen möglichst zusammengefasst werden.

Auf dem Blatt „Anwendung" zur **allgemeinen Substitution** wird das Problem des fehlenden Vorfaktors in Aufgabe 2 in der formalen Notation vorgeführt. Damit sollte die Anwendung des Verfahrens kein Problem mehr darstellen. Eine Stufe schwieriger wird es in Aufgabe 3, wenn die Substitution nicht mehr angegeben ist. In Aufgabe 4 wird deutlich, dass die zuvor gelernten Verfahren Spezialfälle der Substitution waren und ebenfalls in formaler Notation aufgeschrieben werden können. In Aufgabe 5 stehen zwei Integrale, die man sowohl mit partieller Integration, als auch durch Substitution lösen kann. Diese Aufgabe ist insofern wichtig, als dadurch deutlich gemacht wird, dass es nicht immer genau einen vorgegebenen Weg zu Lösung gibt.

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

Die Integration durch Substitution der Integrationsvariablen wird auf den Schülerarbeitsblättern nur anhand eines durchgerechneten Beispiels mit vertiefenden Fragen und Hinweisen eingeführt. Die hier folgende Herleitung eignet sich eher für gemeinsames Entwickeln an der Tafel:

Herleitung

Bei der Integration durch Substitution ergab sich folgende Formel:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad \text{mit der Substitution } u=g(x)$$

Diese wird bei der Integration durch Substitution der Integrationsvariablen in der umgekehrten Richtung verwendet.

Man geht von der rechten Seite aus, diese liegt in der üblichen Schreibweise vor: $\int_a^b f(x)\,dx$

Wenn man die Substitution $u=u(x)$ durchgeführt und die entstandene Gleichung nach x aufgelöst hat, hat man einen Funktionsterm mit der Variable u erhalten: $x(u)$, die Ableitung der Funktion x wird berechnet und eingesetzt: $x'(u)=\frac{dx}{du}$

Dann erhält man aus der obigen Vorschrift:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \left(f(x(u))\frac{dx}{du} \right) du = \int_{u(a)}^{u(b)} \underbrace{f(x(u))x'(u)}_{\text{Funktion in u}}\,du}$$

Der neue Integrand ist eine Funktion mit der Variablen u. Wenn die Substitution zielführend war, sollte diese so „einfach" sein, dass das Integral nun berechenbar ist.

Voraussetzungen für die Anwendbarkeit:

- Die Funktion u mit dem Funktionsterm $u(x)$ muss umkehrbar sein.
- Die Verkettung $f(x(u))$ muss existieren und die Ableitung $x'(u)$ muss stetig sein.

Anwendung und Aufgaben

Es ist der schwierigste Teil des Kapitels zur Integralrechnung, in diesen Aufgaben die geeignete Substitution zu erkennen, die nach dem Bilden der Umkehrfunktion, Einsetzen und Vereinfachen zu berechenbaren Integralen führt. Deshalb ist in der Aufgabe 1 die Substitution angegeben, und die Schüler/innen sollen „beobachten", welche Auswirkungen diese jeweils hat. Häufig führt die Substitution eines Nenners oder eines Teilterms, der in einer Klammer, in einem Exponenten oder unter einer Wurzel steht, zum Ziel. Danach muss man oft noch geschickte Termumformungen anwenden, bevor man eine Stammfunktion bilden kann. Dies wird in den Aufgaben 2 und 3 thematisiert.

In Aufgabe 4 wird die trigonometrische Substitution verwendet, um Teilterme der Form a^2-x^2 zu ersetzen. Hierbei wird durch die Subsitution $u=\frac{1}{a}\cdot\arcsin(x)$ bzw. $x=a\cdot\sin(u)$ der Teilterm nach dem Einsetzen zu $a^2\left(1-\sin^2(u)\right)=a^2\cdot\cos^2(u)$ nach dem trigonometrischen Pythagoras. Die Schreibweise $\arcsin(x)$ mag manchen Kursen noch unbekannt sein und muss ggf. eingeführt werden.