Integrationstechniken

Jahrgangsstufe 12

Stefanie Bertsch

Gliederung

1. Bildungsplan
2. Fachlicher Hintergrund
3. Unterrichtsgang
4. Fazit

Integrationstechniken

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

M A T H E
A H
T T
H A
E H T A M

Vertiefungskurs Mathematik

Baden-Württemberg

REGIERUNGSPRÄSIDIUM STUTTGART

SCHULE UND BILDUNG

<u>Vorschlag</u> zur inhaltlichen Schwerpunktsetzung

des Vertiefungskurses Mathematik

Ergänzende Themen

1. Weiterführung der Funktionsuntersuchungen

- Rationale, trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Differenziations- und Integrationstechniken

Ableiten ist ein Handwerk – und Integrieren eine Kunst!

Integrationstechniken

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Mathematik Leistungsfach	**Vertiefungskurs Mathematik**
Integral	Partielle Integration
Summen-, Faktorregel	Logarithmische Integration
Lineare Substitution	Substitution
Integralfunktion	Substitution der Integrationsvariable
Hauptsatz	Partialbruchzerlegung
Anwendungen (!)	Stammfunktionen finden

Grundverständnis
Anwendungsorientierung

Integrationstechniken

Begründung für die Schwerpunktsetzung

- Guter Zugang, da Thema im LF und BF
- Weitet den Blick über das LF/BF hinaus
- Wird in allen MINT-Studienfächern benötigt
- Kommt in den Prüfungen der Höheren Mathematik vor
- Zahlreiche Rückmeldungen ehemaliger vkm-SuS:

Die wichtigsten Themen waren die komplexen Zahlen und die Integrationstechniken!

Partielle Integration

Herleitung aus der Produktregel: Für die Funktion f mit

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gilt $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Integrieren der Gleichung:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u' \cdot v\,\mathrm{d}x + \int_a^b u \cdot v'\,\mathrm{d}x$$

Einsetzen der Stammfunktion auf der linken Seite:

$$[u \cdot v]_a^b = \int_a^b u' \cdot v\,\mathrm{d}x + \int_a^b u \cdot v'\,\mathrm{d}x$$

Partielle Integration

$$\int_a^b u' \cdot v \, \mathrm{d}x \;=\; [u \cdot v]_a^b \;-\; \int_a^b u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$

Anwendung auf Integranden der Form

- (ganzrationale Funktion) mal (integrierbare Funktion) zum Teil mehrfach
- (ln(x)) mal (ganzrationale Funktion)
- (trigonometrische Funktion) mal (e-Funktion)
- (trigonometrische Funktion) mal (trigonometrische Funktion) Anwendung des trigonometrischen Pythagoras

Integration durch Substitution

Einstieg über

- Lineare Substitution

$$\int_a^b f(mx+c)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{m}F(mx+c)\right]_a^b$$

- Logarithmische Substitution

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln|f(x)|]_a^b$$

Integration durch Substitution

Herleitung aus der Kettenregel:

Ableiten von $F\big(g(x)\big)$ liefert $F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

Also kann man integrieren:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\,dx = \left[F\big(g(x)\big)\right]_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$$

Dies könnte entstanden sein aus

$$F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

durch die Substitution $u = g(x)$.

Integration durch Substitution

Ohne „Umweg“ über die Stammfunktion:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u$$

Mit der Substitution $u = g(x)$.

Voraussetzungen:
Auf dem Intervall $[a; b]$ ist f stetig, sowie g differenzierbar und die Ableitung g' stetig.
Die Verkettung $f \circ g$ existiert auf $[a; b]$.

Integration durch Substitution

Formale Notation nach Leibniz: $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

$$\int_0^1 \left(2x^2+1\right)^3 \cdot 4x\,dx$$

$$= \int_1^3 u^3\,du$$

$$= \left[\frac{1}{4}u^4\right]_1^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

Nebenrechnungen

Subst.: $u = 2x^2+1$

$$\frac{du}{dx} = 4x \quad |\cdot dx$$

$$du = 4x\,dx$$

Grenzen: $u_1 = 2\cdot 0^2+1 = 1$

$u_2 = 2\cdot 1^2+1 = 3$

Integration durch Substitution

Anwendung auf Integranden der Form

- (verkettete Funktion) mal (innere Ableitung)
- (verkettete Funktion) mal (innere Ableitung bis auf Vorfaktor)

Vernetzung

Lineare Substitution und logarithmische Integration können ebenfalls in formaler Notation geschrieben werden.

Einige Integrale lassen sich partiell und mit Substitution lösen.

Integration durch Substitution der Integrations-Variablen

Die Formel $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$ wird „in umgekehrter Richtung“ verwendet:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} \left(f(x(u)) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \right) \mathrm{d}u = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x(u))x'(u)\,\mathrm{d}u$$

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,dx$$

$$= \int_5^6 \frac{e^{2\ln(u-4)}}{u} \cdot \frac{1}{u-4}\,du$$

$$= \int_5^6 \frac{e^{\ln\left((u-4)^2\right)}}{u} \frac{1}{u-4}\,du$$

$$= \int_5^6 \frac{(u-4)^2}{u} \cdot \frac{1}{u-4}\,du$$

$$= \int_5^6 \frac{u-4}{u}\,du = \int_5^6 1-\frac{4}{u}\,du$$

$$= \left[u - 4\ln|u|\right]_5^6$$

$$= 1 - 4\ln(6) + 4\ln(5)$$

Nebenrechnungen

Subst.:

$$u = e^x + 4 \quad |-4$$

$$u - 4 = e^x \quad |\ln(\ldots)$$

$$x = \ln(u-4)$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{u-4}$$

$$dx = \frac{1}{u-4}\,du$$

Grenzen:

$$u_1 = e^0 + 4 = 5$$

$$u_2 = e^{\ln(2)} + 4 = 6$$

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

Voraussetzungen:

Auf dem Intervall $[a; b]$ muss gelten:

- f ist stetig.
- Die Funktion u mit dem Fkt.term u(x) ist umkehrbar.
- Die Umkehrfunktion x mit dem Fkt.term x(u) ist differenzierbar.
- Die Ableitung x'(u) ist stetig.
- Die Verkettung $f \circ x$ existiert.

Integration durch Substitution der Integrationsvariablen

Schwierigster Teil des Themas:
Finden einer Substitution, mit der es „klappt“.

Strategien:
Substituiere

- Summen im Nenner
- Summen unter Wurzeln
- Summen in Klammern

Trigonometrische Substitution: Terme der Form $a^2 - x^2$ werden durch $x = a \cdot \sin(u)$ zu $a^2 \cdot (1 - \sin^2(u)) = a^2 \cdot \cos^2(u)$

Integration durch Partialbruchzerlegung

Eigentlich keine Integrationsmethode, sondern eine Vereinfachung für gebrochen-rationale Funktionen f.

Hat der Nenner von f ausschließlich einfache reelle Nullstellen, so kann man schreiben:

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n}$$

g(x) ist ein Polynom von kleinerem Grad als n.

Integration durch Partialbruchzerlegung

Hat der Nenner von f eine n-fache reelle Nullstelle, so kann man schreiben:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{a_1}{x-x_0} + \frac{a_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-x_0)^n}$$

g(x) ist ein Polynom von kleinerem Grad als n.

Bei einfachen und mehrfachen Nullstellen kombiniert man diese beiden Ansätze.

Integration durch Partialbruchzerlegung

Bestimmung der Koeeffizienten $a_1; a_2; \ldots; a_n$:

- Durchmultiplizieren mit dem Nenner
- Ordnen nach Potenzen von x
- Koeffizientenvergleich liefert LGS
- Lösen des LGS (Ist eindeutig lösbar!)

Vor Anwendung der Partialbruchzerlegung:

- Falls Zählergrad höher als Nennergrad: Polynomdivision
- Nullstellen des Nenners bestimmen

Unterrichtsgang

8 Doppelstunden

Partielle Integration	2 DS
Lineare Substitution, logarithmische Integration	1 DS
Integration durch Substitution	1 DS
Substitution der Integrationsvariable	1,5 DS
Stammfunktionen bestimmen	0,5 DS
Partialbruchzerlegung	1 DS
Vermischte Übungen	1 DS

Unterrichtsgang

Mögliche Verkürzung auf 5 Doppelstunden

Partielle Integration	1,5 DS
Lineare Substitution, logarithmische Integration	1 DS
Integration durch Substitution	1 DS
Substitution der Integrationsvariable	1 DS
Stammfunktionen bestimmen	0,5 DS

Aufbau des Schülermaterials: Arbeitsblätter

Variante 1: „Freiarbeit“

Erarbeitung	
Anwendung	für alle kopieren
Aufgaben	
Lösungen kurz (getippt)	1x drucken und auslegen
Lösungen ausführlich (handschriftlich)	per Moodle zur Verfügung stellen

Integrationstechniken

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

M A T H E
A Vertiefungskurs Mathematik H
E H T A M

Aufbau des Schülermaterials: Arbeitsblätter

Variante 2: „klassisch“

Erarbeitung	
Anwendung	Lehrermaterial
Aufgaben	für alle kopieren
Lösungen kurz (getippt)	Lehrermaterial
Lösungen ausführlich (handschriftlich)	per Moodle zur Verfügung stellen

Aufbau des Schülermaterials: Arbeitsblätter

Beispiel: Integration durch Substitution

Erarbeitung: Herleitung aus Kettenregel: Formel „mit Lücken“

Beispiel:

Beispiel

$\int_0^1 (2x^2+1)^3 \cdot 4x\,dx$ Überlegungen:

Damit erhält man nach (2) das einfache Integral:

____

$g(x) =$

$g'(x) =$

Subst.: $u =$

$f(u) =$

Grenzen: $u_1 = g(a) =$

$u_2 = g(b) =$

Formale Notation nach Leibniz: vorgerechnetes Beispiel in Farbe

Aufbau des Schülermaterials: Arbeitsblätter

Beispiel: Integration durch Substitution

Anwendung: Formel gegeben (zur Kontrolle der Erarbeitung)

1. Hinweis: Lösen Sie Aufgabe 1 mit der Formel.
2. Integranden mit fehlendem Vorfaktor: Beispiel einer formalen Notation in Farbe vorgerechnet.
   Hinweis: Lösen Sie Aufgabe 2 so. (Substitution angegeben)
3. Tipp zum Finden der Substitutionen für Aufgabe 3
4. Je eine Aufgabe zu linearer und logarithmischer Substitution
5. Hinweis: Lösen Sie Aufgabe 4 zweimal: partiell & Substitution

Aufbau des Lehrermaterials:

- Übersicht: Inhalte der DStd. mit Verlinkung auf die Schüler-Arbeitsblätter
- Didaktische Hinweise (zum ganzen Thema)
- diese Präsentation

- Hinweise zur partiellen Integration
- Hinweise zur Substitution
- Hinweise zur Partialbruchzerlegung
  - ➢ Jeweils Fachliches und Hinweise zum Unterricht

Fazit

- Das Thema macht den SuS Spaß, vor allem bei der Substitution (schwere Integrale „in Luft auflösen“)
- Es weitet den Blick über ein LF-Thema hinaus
- Es wird in allen Vorlesungen und Prüfungen der Höheren Mathematik benötigt
- Unterrichtsmaterialien zur Selbsterarbeitung z.B. für jahrgangsübergreifende Kurse
- Genügend Zeit zum Üben einplanen!
- Kürzungsmöglichkeiten