Wurzeln aus komplexen Zahlen

Aufgabe 1 Finden Sie zwei verschiedene Lösungen für die Gleichung $a^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
Formulieren Sie den „Trick“ für die zweite Lösung in Worten.

Aufgabe 2 Leiten Sie aus Aufgabe 1 zwei Lösungen für die Gleichung $a^2 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ her.

Definition Eine komplexe Zahl a heißt **eine n-te Wurzel von b** ($b \in \mathbb{C}$), wenn gilt: $a^n = b$.

Herleitung der Formel von Moivre:

Aus der Eulerschen Darstellung $b = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ erkennt man, dass $a_0 = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{\varphi}{n}}$ eine n-te Wurzel aus b ist. Rechnen Sie dies nach:

$a_0{}^n =$

Da man *b* auch noch folgendermaßen schreiben kann: $b = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi)}$ ($k = 1; 2; \ldots$), erhält man weitere Lösungen.

Notieren Sie die ersten beiden $a_1 =$ und $a_2 =$

und berechnen Sie zur Kontrolle jeweils die n-te Potenz dieser Lösungen.

$a_1^n =$ $a_2^n =$

Bei welcher Zahl k erhält man zum ersten Mal wieder a_0 als Lösung? Warum?

Die Formel von Moivre

Für jedes $b \in \mathbb{C}$ mit $b \neq 0$ hat die Gleichung $a^n = b = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n-ten Wurzeln aus b, die man mit folgender Formel berechnet:

$$a_k = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right)} \quad \text{mit } k = 0; \ldots; n-1$$

Information

Die n-ten Wurzeln von b liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Ursprung. Sie bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Die Regel: „unter einem Wurzelzeichen darf keine negative Zahl stehen“ muss nun erweitert werden:

Unter einem Wurzelzeichen dürfen weder negative noch komplexe Zahlen stehen.

Wurzeln sind über Potenzgleichungen der Form $a^n = b$ definiert.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die dritten Wurzeln aus -1, d.h. lösen Sie die Gleichung $a^3 = -1$.
(Anleitung: Zuerst -1 in Eulerscher Darstellung, dann die Formel von Moivre)
Zeichnen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene ein.
Kontrollieren Sie die Lösung auf zwei Arten:
1) Entstand ein gleichseitiges Dreieck?
2) Potenzieren Sie die Lösungen mit 3.

Aufgabe 4 Leiten Sie aus Aufgabe 3 ohne nochmalige Anwendung der Formel von Moivre die Lösungen der Gleichung $a^3 = -8$ her und zeichnen Sie diese in die Zeichnung von Aufgabe 3 ein.

Aufgabe 5 Berechnen und zeichnen Sie die Lösungen der Gleichung $w^6 = 1$.
Verallgemeinern Sie dies für $w^n = 1$ und beschreiben Sie die entstehende Zeichnung in Worten:
Die n-ten Einheitswurzeln sind die Lösungen der Gleichung $w^n = 1$ und lauten

$w_k =$; $k =$

Beschreibung:

Aufgabe 6 Zerlegen Sie die Formel von Moivre so, dass man darin die n-ten Einheitswurzeln erkennen kann, also, dass sie zu einem Produkt mit dem Faktor w_k wird:

Beschreiben Sie geometrisch, was sich daraus für die Lösungen der Gleichung $a^6 = \mathrm{i}$ ergibt, wenn man diese aus Aufgabe 5 herleiten möchte.

Aufgabe 7 Lösen Sie die Gleichungen

a) $a^3 = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi \mathrm{i}}$

b) $a^4 = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$

c) $a^8 = 16\,\mathrm{e}^{0,2\pi \mathrm{i}}$

d) $a^6 = -8$ (Zuerst die rechte Seite umschreiben in Eulersche Darstellung.)

e) $a^4 = -16\,\mathrm{i}$

f) $a^5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$