Wurzeln

1) $a^2 = e^{i\pi}$

$a_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

$a_2 = e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$

Trick: Bei Verdopplung des Winkels $\frac{3\pi}{2}$ erhält man $3\pi$, also $\pi + 2\pi$, d.h. man umläuft beim Potenzieren den Kreis eineinhalb Mal.

Es ist $e^{i\cdot 3\pi} = e^{i\cdot\pi}$.

2) $a^2 = 4e^{i\pi}$

$a_1 = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

$a_2 = 2e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$

<u>Zur Herleitung der Formel von Moivre:</u>

$a_0 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}$

$a_0^n = \left(\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}\cdot n} = r\cdot e^{i\varphi} = b$

$\Rightarrow a_0^n = b$

$a_0$ ist eine n-te Wurzel von b.

Weitere n-te Wurzeln von b:

$a_1 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+1\cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$

$a_2 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)}$

Kontrolle:

$a_1^n = \left(\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\cdot n} = r\cdot e^{i\cdot(\varphi+2\pi)} = r\cdot e^{i\varphi} = b$

$a_2^n = \left(\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\cdot n} = r\cdot e^{i\cdot(\varphi+4\pi)} = r\cdot e^{i\varphi} = b$

Gesucht: k, so dass $a_k = a_0$

$a_k = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n}\right)}$

$\hookrightarrow$ Wenn $\frac{k\cdot 2\pi}{n} = 2\pi$, also $\underline{\underline{k=n}}$, dann ist $a_k = a_0$.

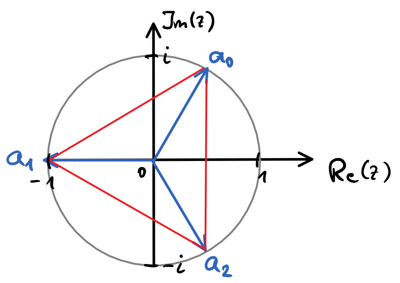
3) $a^3 = -1$

$a^3 = e^{i\pi}$

Moivre: $a_0 = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

$a_1 = 1\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$

$a_2 = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+4\pi}{3}} = e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$




Kontrolle: 1) gleichseitiges Dreieck ✓

2) $a_0^3 = \left(1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 1^3\cdot e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 3} = e^{i\pi} = -1$

$a_1^3 = (-1)^3 = -1$

$a_2^3 = \left(1\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}\right)^3 = 1^3\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}\cdot 3} = e^{i\cdot 5\pi} = e^{i\pi} = -1$ $\Bigg\}$ ✓

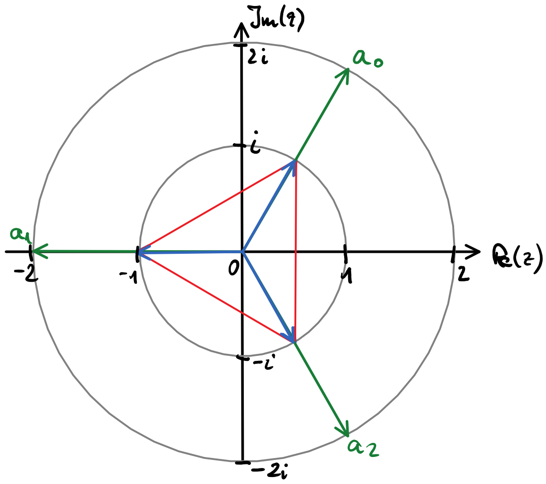
4) $a^3 = -8$

$a^3 = 8 \cdot e^{i\pi}$

$a_0 = 2e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

$a_1 = 2e^{i\pi}$

$a_2 = 2e^{i \cdot \frac{5\pi}{3}}$




5) $\omega^6 = 1$

$\omega^6 = e^0$

$\omega_0 = e^{i \cdot \frac{0}{6}} = e^0 = 1$

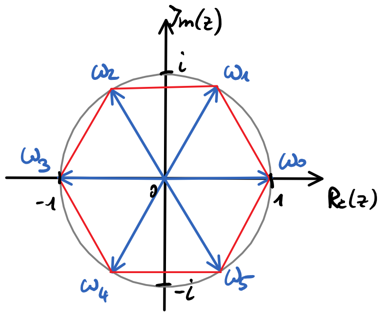
$\omega_1 = e^{i \cdot \frac{0+1\cdot 2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

$\omega_2 = e^{i \cdot \frac{0+2\cdot 2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{4\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$

$\omega_3 = e^{i \cdot \frac{0+3\cdot 2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{6\pi}{6}} = e^{i \cdot \pi} = -1$

$\omega_4 = e^{i \cdot \frac{0+4\cdot 2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{8\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}}$

$\omega_5 = e^{i \cdot \frac{0+5\cdot 2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{10\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{5\pi}{3}}$




<u>allgemein:</u> n-te Einheitswurzeln: $\boxed{\omega_k = e^{i \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{n}} \quad ; k = 0; 1; \ldots; n-1}$

Die Lösungen der Gleichung $\omega^n = 1$ bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein regelmäßiges n-Eck. Alle Ecken liegen auf einem Kreis mit dem Radius 1. Die erste Ecke $\omega_0 = 1$. Von Ecke zu Ecke drehen sich die Zeiger um den Winkel $\frac{2\pi}{k}$.

6) <u>Formel von Moivre umschreiben:</u>

$$a_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}} \cdot e^{i \cdot k \frac{2\pi}{n}}$$

$$\boxed{a_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}} \cdot \omega_k} \quad ; k = 0; 1; \ldots; n-1$$

$a^6 = i$

$a^6 = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$a_k = \sqrt[6]{1} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{6}} \cdot \omega_k = e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} \cdot \omega_k$

Man dreht das Sechseck aus Aufgabe 5 um den Winkel $\frac{\pi}{12}$, so dass die ursprüngliche Ecke $\omega_0$ nun auf $a_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ liegt. Somit ergeben sich alle weiteren Lösungen, indem man die Lösungen von Aufg. 5 mit $e^{i\frac{\pi}{12}}$ multipliziert.

7a) $a^3 = e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$a_0 = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ ; $a_1 = e^{i\cdot\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi}{3}} = e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}}$ ; $a_2 = e^{i\cdot\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}} = e^{i\cdot\frac{11\pi}{6}}$

b) $a^4 = e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$a_0 = e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi:4} = e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$ ; $a_1 = e^{i\cdot\frac{\frac{2}{3}\pi+2\pi}{4}} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$ ; $a_2 = e^{i\cdot\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}} = e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}}$ ; $a_3 = e^{i\cdot\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}} = e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$

c) $a^8 = 16\cdot e^{0{,}2\pi i}$

$a_0 = \sqrt[8]{16}\, e^{i\cdot\frac{0{,}2\pi}{8}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{40}}$ ; $a_1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{5}+2\pi}{8}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{11\pi}{40}}$ ; $a_2 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{5}+4\pi}{8}} = \sqrt{2}\, e^{i\cdot\frac{21\pi}{40}}$ ;

$a_3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{31\pi}{40}}$ ; $a_4 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{41\pi}{40}}$ ; $a_5 = \sqrt{2}\, e^{i\cdot\frac{51\pi}{40}}$ ; $a_6 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{61\pi}{40}}$ ; $a_7 = \sqrt{2}\, e^{i\cdot\frac{71\pi}{40}}$

d) $a^6 = -8 = 8\cdot e^{i\pi}$

$a_0 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$ ; $a_1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\pi}{6}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\, i$ ; $a_2 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}$ ; $a_3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}}$ ;

$a_4 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{9\pi}{6}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}\, i$ ; $a_5 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{11\pi}{6}}$

e) $a^4 = -16i = 16\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$

$a_0 = 2e^{i\cdot\frac{3\pi}{8}}$ ; $a_1 = 2e^{i\cdot\frac{7\pi}{8}}$ ; $a_2 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{11\pi}{8}}$ ; $a_3 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{15\pi}{8}}$

f) $a^5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$

$a_0 = e^{i\cdot\frac{\pi}{30}}$ ; $a_1 = e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{5}} = e^{i\cdot\frac{13\pi}{30}}$ ; $a_2 = e^{i\cdot\frac{25\pi}{30}}$ ; $a_3 = e^{i\cdot\frac{37\pi}{30}}$ ; $a_4 = e^{i\cdot\frac{49\pi}{30}}$