Komplexe Zahlen – Grundlagen

Einstiegsaufgaben

Aufgabe 1 Eine Aufgabe aus der Renaissance:

Teile eine Strecke der Länge 10 in zwei Teile x und y, so dass das Rechteck mit den Seiten x und y den Flächeninhalt 40 hat.

a) Lösen Sie die Aufgabe.
Akzeptieren Sie dabei vorübergehend, dass ein Minuszeichen unter der Wurzel entsteht. Ziehen Sie teilweise die Wurzel und kürzen Sie, so dass in der Lösung keine Brüche mehr vorhanden sind.

b) Girolamo Cardano (1501-1576) nannte die Zahlen dieser Lösung „quantitas sophistica“ (spitzfindige Größe), denn auf dem Zahlenstrahl können diese Zahlen nicht liegen, jedoch stimmt die Probe mit den Ausgangsgleichungen.
Prüfen Sie dies nach.
Welche neue Rechenregel müssen Sie dabei als gültig annehmen?

Aufgabe 2 Versuchen Sie, das Polynom x^3+8 in Linearfaktoren zu zerlegen:

a) Suchen Sie dazu eine Nullstelle, und wenden Sie dann die Polynomdivision an.

b) Wenden Sie die Mitternachtsformel an. Akzeptieren Sie vorübergehend Minuszeichen unter der Wurzel. Geben Sie damit zwei weitere Nullstellen des Polynoms an.

c) Setzen Sie die Nullstellen in das Polynom ein. Welche neuen Rechenregeln müssen Sie dabei als gültig annehmen, damit sich 0 als Lösung ergibt?

Zahlbereichserweiterungen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ führt man in der Mathematik stets dann neue Zahlbereiche ein, wenn es Gleichungen gibt, die man im bisherigen Zahlbereich zwar aufstellen, aber nicht lösen kann. Dabei müssen sämtliche Rechenregeln so für den neuen Zahlbereich definiert werden, dass sie im bisherigen Zahlbereich weiterhin gültig bleiben.

Urspr. Zahlbereich	unlösbare Gleichung	Lösung	neuer Zahlbereich
$\mathbb{N}$	$x+5=4$	$x=-1$	die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$3\cdot x=2$	$x=\frac{2}{3}$	die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$	$x^2=2$	$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$	die reellen Zahlen $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x^2=-1$	???	???

Leonhard Euler (1707 – 1783) führte zur Lösung der letzteren Gleichung eine neue Zahl, die *imaginäre Einheit i,* ein, die die Eigenschaft $\mathrm{i}^2=-1$ hat. Somit hat diese Gleichung die Lösungen $x_{1,2}=\pm\mathrm{i}$.

Anmerkung:
Man schreibt **nicht** $i=\sqrt{-1}$, da die Operation „Wurzelziehen“ bisher nur in $\mathbb{R}$ definiert ist.

Die komplexen Zahlen

Wir erweitern den Zahlbereich $\mathbb{R}$ folgendermaßen:

Da $\mathbb{R}$ sich mit Hilfe eines Zahlenstrahls darstellen lässt, der die reelle Einheit 1 hat, denken wir uns diesen als x-Achse. Senkrecht dazu denken wir uns (wie eine y-Achse) einen weiteren Zahlenstrahl mit der imaginären Einheit i. Nun lässt sich jeder Punkt (a|b) der Ebene als eine Zahl

$$z = a + b \cdot \mathrm{i} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

interpretieren. Wir nennen *a* den Realteil von *z,* und *b* den Imaginärteil von z. Alle Zahlen dieser Form bilden die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Die Form z=a+bi nennt man die Normalform einer komplexen Zahl.

Die gedachten Achsen nennen wir reelle bzw. imaginäre Achse, und beschriften sie mit Re(z) bzw. Im(z). Die Zahlenebene heißt nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) die Gaußsche Zahlenebene. Die komplexen Zahlen können entweder als Punkte (wie oben) oder als Zeiger, d.h. Pfeile, die vom Ursprung auf den Punkt (a|b) zeigen, dargestellt werden.

Aufgabe 3 Zeichnen Sie eine Gaußsche Zahlenebene und tragen Sie dort die komplexen Zahlen 1, i, 5+i, -2+2i, -1-4i, -3, 3-2i, -3i ein.

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Um mit komplexen Zahlen rechnen zu können, müssen sämtliche Rechenoperationen im Zahlbereich $\mathbb{C}$ so definiert werden, dass sie weiterhin richtige Ergebnisse liefern, wenn man nach diesen Regeln zwei rein reelle Zahlen miteinander addiert, subtrahiert, multipliziert usw.

Aufgabe 4 Wählen Sie zwei (oder mehr) verschiedene komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 \cdot \mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot \mathrm{i}$ und berechnen Sie so, wie Sie es für sinnvoll halten:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$

Suchen Sie die i-Taste auf Ihrem Taschenrechner und prüfen Sie die Lösungen nach.

Aufgabe 5 Formulieren Sie die Rechenregeln der Addition, Subtraktion und Multiplikation der komplexen Zahlen in Normalform.

Um eine Division durchführen zu können, benötigt man zu jeder komplexen Zahl z ihre *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z}$, die folgendermaßen definiert ist:

Zu $z = a + b \cdot \mathrm{i}$ ist die Zahl $\overline{z} = a - b \cdot \mathrm{i}$ konjugiert komplex.

Aufgabe 6 Zeichnen Sie zu einigen der Zahlen aus Nr. 3 ihre konjugiert komplexe Zahl ein.

Aufgabe 7 Berechnen Sie mit den Beispielen aus Nr. 4 und allgemein den Term $z \cdot \overline{z}$.
Was fällt Ihnen auf? Schreiben Sie dies als Merkregel oder Formel auf.

Um eine Division berechnen zu können, muss man den Nenner reell machen, dazu wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$.

Aufgabe 8 Führen Sie einige Beispiele zur Division durch (TR-Kontrolle!) und formulieren Sie die Rechenregel der Division für komplexe Zahlen in Normalform.