Komplexe Zahlen Grundlagen

1a) $(1)\quad x+y=10 \quad |-x$

$(2)\quad x\cdot y = 40$

$(1')\quad y = 10-x$

$(1')$ in (2) $\quad x(10-x)=40 \quad |-40$

$-x^2+10x-40=0$

$$x_{1/2} = \frac{-10\pm\sqrt{100-160}}{-2} = \frac{-10\pm\sqrt{-60}}{-2} = 5\mp\sqrt{-15}$$

x_1 in $(1')$: $\quad y_1 = 10-(5-\sqrt{-15}) = 5+\sqrt{-15} = x_2$

Die Seiten des Rechtecks müssten die Längen

$x = 5-\sqrt{-15}$ und $y = 5+\sqrt{-15}$ haben.

b) Probe: $(1)\quad 5-\sqrt{-15}+5+\sqrt{-15} = 5+5 = 10$ ✓

$(2)\quad (5-\sqrt{-15})\cdot(5+\sqrt{-15}) = 25-\sqrt{-15}^2 = 25-(-15) = 40$ ✓

folgende Rechenregeln müssten gelten:

für $\underline{a<0}$: $\quad \sqrt{a}-\sqrt{a}=0$

$\sqrt{a}^2 = a < 0$

2 a) $x^3+8 \qquad$ Nullstelle: $x_1=-2$

$$
\begin{array}{l}
(x^3+8):(x+2) = x^2-2x+4 \\
\underline{-(x^3+2x^2)} \\
\quad -2x^2+8 \\
\quad \underline{-(-2x^2-4x)} \\
\qquad 4x+8 \\
\qquad \underline{-(4x+8)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

b) $x^2-2x+4=0$

$$x_{2/3} = \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} = 1\pm\sqrt{-3}$$

$$\underline{x^3+8 = (x+2)(x-1-\sqrt{-3})(x-1+\sqrt{-3})}$$

c) Einsetzen: $\quad x_1=-2: \quad (-2)^3+8 = -8+8 = 0$ ✓

$x_2 = 1+\sqrt{-3}: \quad (1+\sqrt{-3})^3+8 = 1^3+3\cdot1^2\cdot\sqrt{-3}+3\cdot1\cdot\sqrt{-3}^2+\sqrt{-3}^3+8$

$= 1+3\cdot\sqrt{-3}+3\cdot(-3)+(-3)\cdot\sqrt{-3}+8$

$= 1-9+8 = 0$

$x_3 = 1-\sqrt{-3}: \quad (1-\sqrt{-3})^3+8 = 1^3+3\cdot1^2\cdot(-\sqrt{-3})+3\cdot1\cdot(-\sqrt{-3})^2+(-\sqrt{-3})^3+8$

$= 1-3\sqrt{-3}+3\cdot(-3)-(-3)\cdot\sqrt{-3}+8$

$= 1-9+8-3\sqrt{-3}+3\sqrt{-3} = 0$

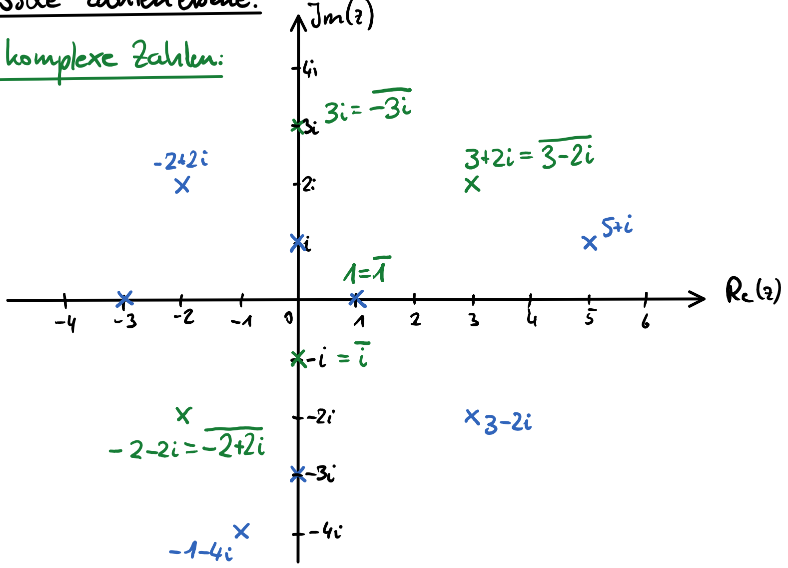
neue Rechenregeln: $\underline{a<0}$, $k\in\mathbb{Z}$: $k\cdot\sqrt{a}-k\sqrt{a}=0$

$\sqrt{a}^2 = a<0$

$\sqrt{a}^3 = a\cdot\sqrt{a}$

3) Gaußsche Zahlenebene:

6) konj. komplexe Zahlen:



4) Beispiele: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -4+i$

$z_1+z_2 = (2+3i)+(-4+i) = 2-4+3i+i = -2+4i$

$z_1-z_2 = (2+3i)-(-4+i) = 2+4+3i-i = 6+2i$

$z_1\cdot z_2 = (2+3i)\cdot(-4+i) = -8+2i-12i+3i^2 \underset{i^2=-1}{=} -8-3+2i-12i = -11-10i$

5) Rechenregeln:

Addition: $z_1+z_2 = (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

Subtraktion: $z_1-z_2 = (a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

Multiplikation: $z_1\cdot z_2 = (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

6) siehe oben in 3)

7) $z_1\cdot\overline{z_1} = (2+3i)(2-3i) = 4-6i+6i-9i^2 = 4+9 = 13$

$z_2\cdot\overline{z_2} = (-4+i)(-4-i) = 16+4i-4i-i^2 = 16+1 = 17$

$z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-abi+abi-b^2i^2 = a^2+b^2$

Merke: Das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrer konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ ist eine reelle Zahl.

$$z\cdot\overline{z} = a^2+b^2$$

8) Beispiel: $\dfrac{4+3i}{1-6i} = \dfrac{(4+3i)(1+6i)}{(1-6i)(1+6i)} = \dfrac{4+24i+3i+18i^2}{1+36} = \dfrac{-14+27i}{37} = -\dfrac{14}{37} + \dfrac{27}{37}i$

Division: $\dfrac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \dfrac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$