Vertiefungskurs Mathematik 12

Arbeitsblatt: Zeichnerische Darstellung komplexer Wurzeln

1) Darstellung komplexer Einheitswurzeln

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in C.

Beispiel 1: n = 3 ➔ $z^3 = 1$

Beachte: Das Wurzelziehen die Umkehrung vom Potenzieren und es gilt: $e^{2\pi i} = 1$

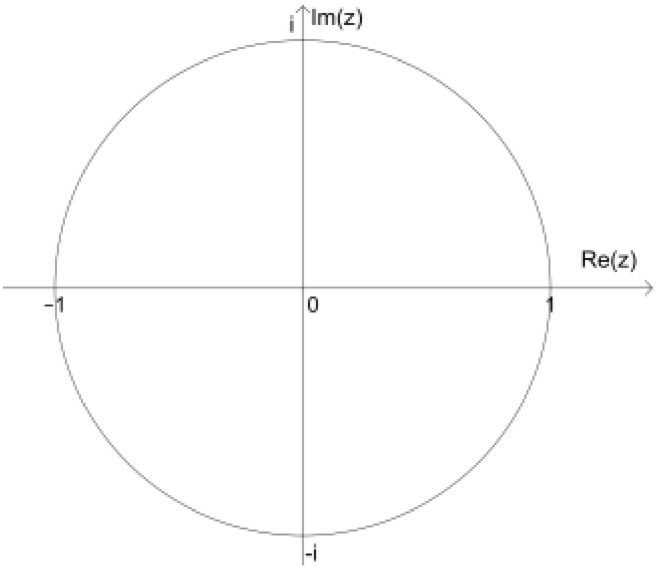
Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^3 = (e^{\varphi_k \cdot i})^3 =$ Somit gilt für φ_k:

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{2\pi i} = e^{4\pi i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

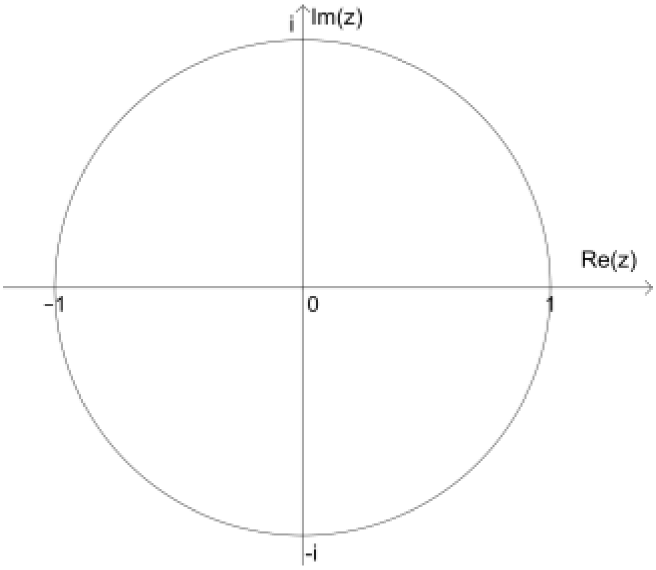
Beispiel 2: n = 4 ➔ $z^4 = 1$

Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^4 = (e^{\varphi_k \cdot i})^4 =$ Somit gilt für φ_k:

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

Beispiel 3: n = 5 ➔ $z^5 = 1$

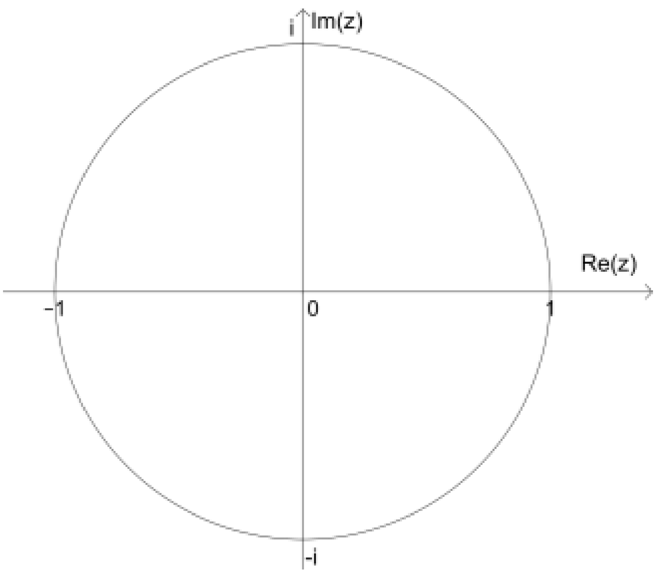
Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^5 = (e^{\varphi_k \cdot i})^5 =$

Somit gilt für φ_k:

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

2) Darstellung der Lösungen der Gleichung $z^n = z_0$ mit $z_0 = e^{\varphi i}$

Beispiel 1: n = 3 ➔ $z^3 = e^{\frac{\pi}{4}i}$

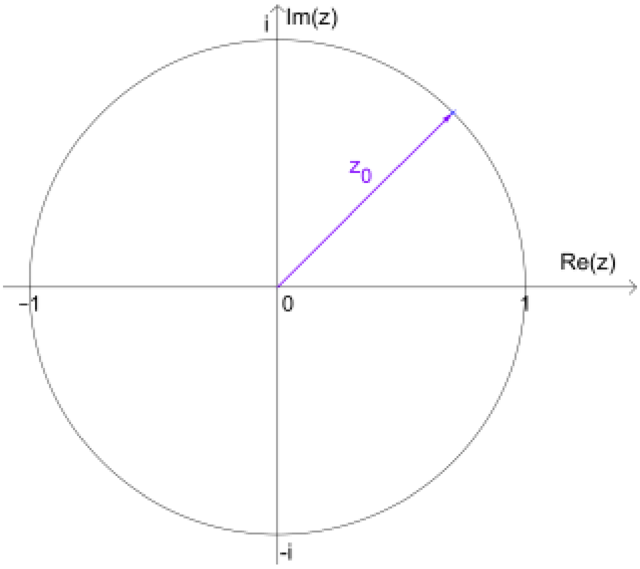
Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

${z_k}^3 = (e^{\varphi_k \cdot i})^3 =$ Somit gilt für φ_k:

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{9\pi}{4}i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 3 zusammen? (Vergleiche!)

Beispiel 2: n = 5 ➔ $z^5 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

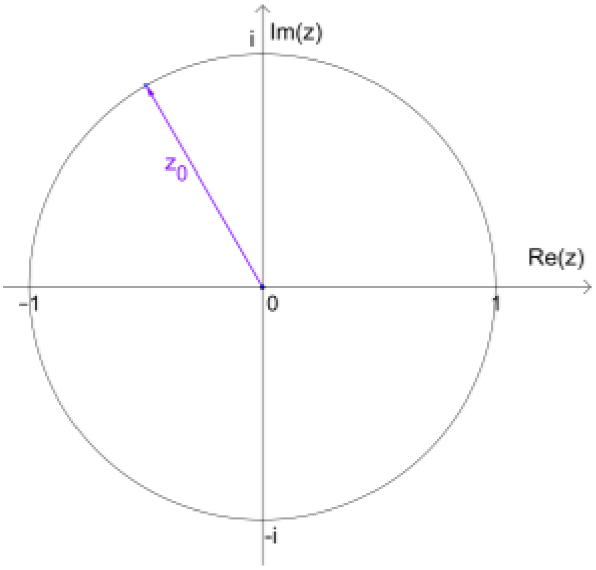
Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^5 = (e^{\varphi_k \cdot i})^5 =$ Somit gilt für φ_k:

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{8\pi}{3}i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 5 zusammen? (Vergleiche!)

Wie erhält man allgemein alle Lösungen der Gleichung $z^n = z_0 = e^{\varphi \cdot i}$ in C?