Vertiefungskurs Mathematik 12

Lösungen: Zeichnerische Darstellung komplexer Wurzeln

1) Darstellung komplexer Einheitswurzeln

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in C.

Beispiel 1: n = 3 ➔ $z^3 = 1$

Beachte: Das Wurzelziehen die Umkehrung vom Potenzieren und es gilt: $e^{2\pi i} = 1$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^3 = (e^{\varphi_k \cdot i})^3 = e^{3 \cdot \varphi_k \cdot i} = 1 = e^{2\pi \cdot i}$ Somit gilt für φ_k: $3 \cdot \varphi_k = k \cdot 2\pi$

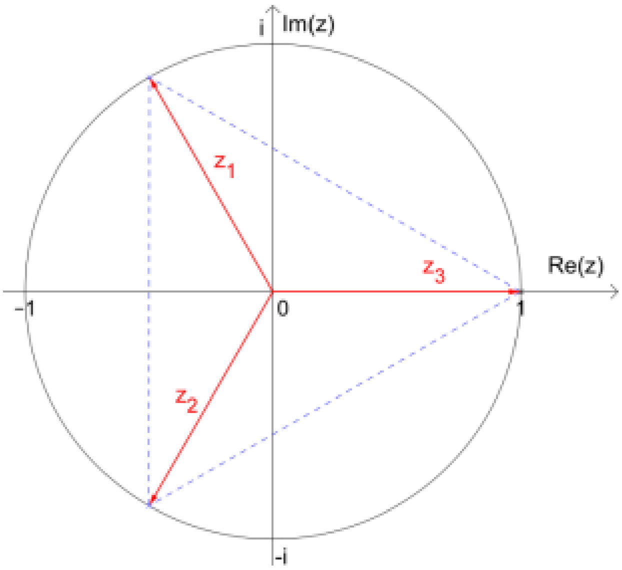
Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{2\pi i} = e^{4\pi i}$

Lösungen: $3 \cdot \varphi_1 = 2\pi$ ➔ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ ➔ $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i}$

$3 \cdot \varphi_2 = 4\pi$ ➔ $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$ ➔ $z_2 = e^{\frac{4\pi}{3} \cdot i}$

$3 \cdot \varphi_3 = 6\pi$ ➔ $\varphi_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ ➔ $z_3 = e^{2\pi \cdot i} = 1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i}$

$z_2 = e^{\frac{4\pi}{3} \cdot i}$

$z_3 = 1$

Beispiel 2: n = 4 ➔ $z^4 = 1$

Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

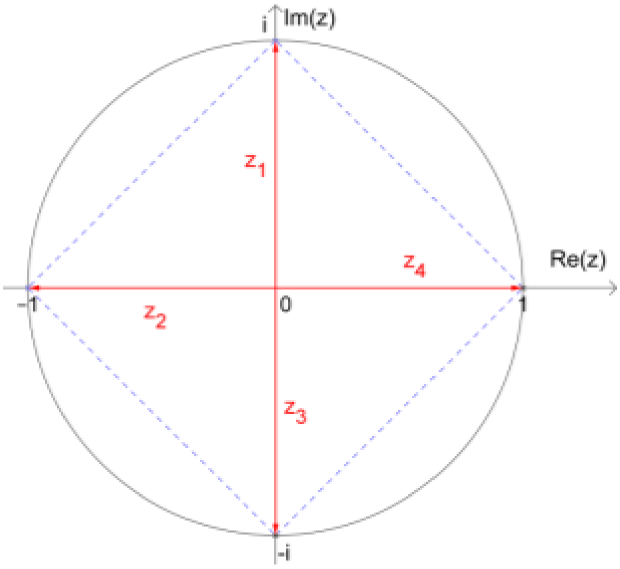
Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^4 = (e^{\varphi_k \cdot i})^4 = e^{4 \cdot \varphi_k \cdot i} = 1 = e^{2\pi \cdot i}$ Somit gilt für φ_k: $4 \cdot \varphi_k = k \cdot 2\pi$

Lösungen: $4 \cdot \varphi_1 = 2\pi$ ➔ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{4}$ ➔ $z_1 = e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$; $4 \cdot \varphi_2 = 4\pi$ ➔ $\varphi_2 = \frac{4\pi}{4}$ ➔ $z_2 = e^{\pi \cdot i}$

$4 \cdot \varphi_3 = 6\pi$ ➔ $\varphi_3 = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ ➔ $z_3 = e^{\frac{3\pi}{2} \cdot i}$; $4 \cdot \varphi_4 = 8\pi$ ➔ $\varphi_4 = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$ ➔ $z_4 = 1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$z_1 = e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$

$z_2 = e^{\pi \cdot i}$

$z_3 = e^{\frac{3\pi}{2} \cdot i}$

$z_4 = 1$

Beispiel 3: n = 5 ➔ $z^5 = 1$

Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

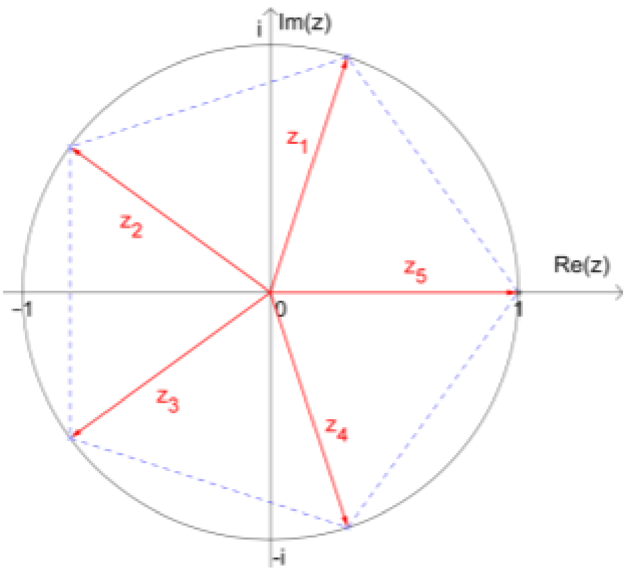
$z_k{}^5 = (e^{\varphi_k \cdot i})^5 = e^{5 \cdot \varphi_k \cdot i} = 1 = e^{2\pi \cdot i}$ Somit gilt für φ_k: $5 \cdot \varphi_k = k \cdot 2\pi$

Lösungen: $5 \cdot \varphi_1 = 2\pi$ ➔ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{5}$ ➔ $z_1 = e^{\frac{2\pi}{5} \cdot i}$; $5 \cdot \varphi_2 = 4\pi$ ➔ $\varphi_2 = \frac{4\pi}{5}$ ➔ $z_2 = e^{\frac{4\pi}{5} \cdot i}$

$5 \cdot \varphi_3 = 6\pi$ ➔ $\varphi_3 = \frac{6\pi}{5}$ ➔ $z_3 = e^{\frac{6\pi}{5} \cdot i}$; $5 \cdot \varphi_4 = 8\pi$ ➔ $\varphi_4 = \frac{8\pi}{5}$ ➔ $z_4 = e^{\frac{8\pi}{5} \cdot i}$

$5 \cdot \varphi_5 = 10\pi$ ➔ $\varphi_5 = 2\pi$ ➔ $z_5 = 1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5} \cdot i}$

$z_2 = e^{\frac{4\pi}{5} \cdot i}$

$z_3 = e^{\frac{6\pi}{5} \cdot i}$

$z_4 = e^{\frac{8\pi}{5} \cdot i}$

$z_5 = 1$

2) Darstellung der Lösungen der Gleichung $z^n = z_0$ mit $z_0 = e^{\varphi i}$

Beispiel 1: n = 3 ➔ $z^3 = e^{\frac{\pi}{4}i}$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

${z_k}^3 = (e^{\varphi_k \cdot i})^3 = e^{3 \cdot \varphi_k \cdot i} = z_0 = e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$ Somit gilt für φ_k: $3 \cdot \varphi_k = \frac{\pi}{4} + (k-1) \cdot 2\pi$

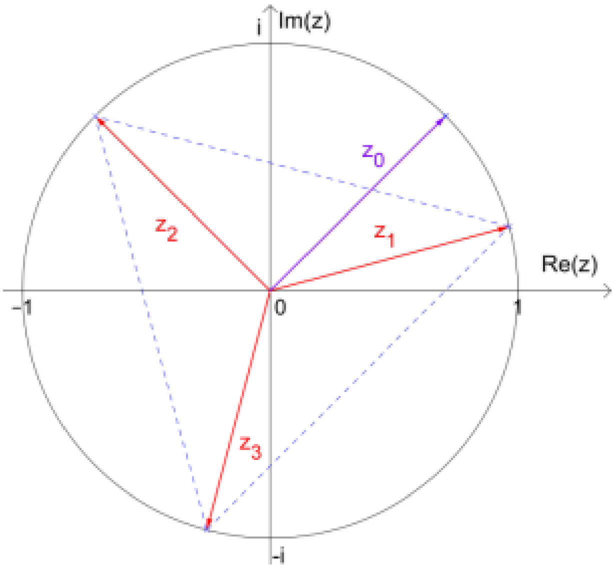
Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{9\pi}{4}i}$

Lösungen: $3 \cdot \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ ➔ $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$ ➔ $z_1 = e^{\frac{\pi}{12} \cdot i}$

$3 \cdot \varphi_2 = \frac{9\pi}{4}$ ➔ $\varphi_2 = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ ➔ $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$

$3 \cdot \varphi_3 = \frac{17\pi}{4}$ ➔ $\varphi_3 = \frac{17\pi}{12}$ ➔ $z_3 = e^{\frac{17\pi}{12} \cdot i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$z_1 = e^{\frac{\pi}{12} \cdot i}$

$z_2 = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$

$z_3 = e^{\frac{17\pi}{12} \cdot i}$

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 3 zusammen? (Vergleiche!)

Man stellt fest, dass das regelmäßige Dreieck durch Drehung um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{\varphi}{n} = \frac{\pi}{12}$ aus dem Dreieck entsteht, das auf der Seite 1 abgebildet ist. (Die Eckpunkte des dortigen Dreiecks sind die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.)

Beispiel 2: n = 5 ➔ $z^5 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z_k = e^{\varphi_k \cdot i}$

Wenn man eine Zahl z_k gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z_k{}^5 = (e^{\varphi_k \cdot i})^5 = e^{5\cdot\varphi_k\cdot i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ Somit gilt für φ_k: $5\cdot\varphi_k = \frac{2\pi}{3} + (k-1)\cdot 2\pi$

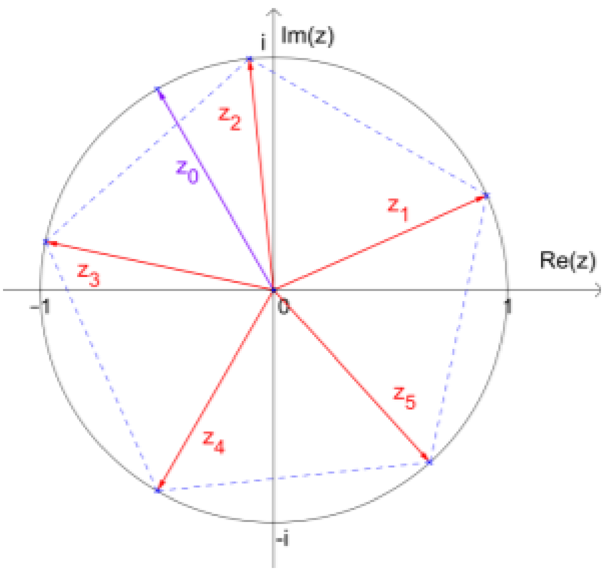
Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{8\pi}{3}i}$

Lösungen: $5\cdot\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ ➔ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{15}$ ➔ $z_1 = e^{\frac{2\pi}{15}\cdot i}$; $5\cdot\varphi_2 = \frac{8\pi}{3}$ ➔ $\varphi_2 = \frac{8\pi}{15}$ ➔ $z_2 = e^{\frac{8\pi}{15}\cdot i}$

$5\cdot\varphi_3 = \frac{14\pi}{3}$ ➔ $\varphi_3 = \frac{14\pi}{15}$ ➔ $z_3 = e^{\frac{14\pi}{15}\cdot i}$; $5\cdot\varphi_4 = \frac{20\pi}{3}$ ➔ $\varphi_4 = \frac{4\pi}{3}$ ➔ $z_4 = e^{\frac{4\pi}{3}\cdot i}$

$5\cdot\varphi_5 = \frac{26\pi}{3}$ ➔ $\varphi_5 = \frac{26\pi}{15}$ ➔ $z_5 = e^{\frac{26\pi}{15}\cdot i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$z_1 = e^{\frac{2\pi}{15}\cdot i}$

$z_2 = e^{\frac{8\pi}{15}\cdot i}$

$z_3 = e^{\frac{14\pi}{15}\cdot i}$

$z_4 = e^{\frac{4\pi}{3}\cdot i}$

$z_5 = e^{\frac{26\pi}{15}\cdot i}$

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 5 zusammen? (Vergleiche!)

Man stellt fest, dass das regelmäßige Fünfeck durch Drehung um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi}{15}$ aus dem Fünfeck entsteht, das auf der Seite 2 abgebildet ist. (Die Eckpunkte des dortigen Fünfecks sind die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$.)

Wie erhält man allgemein alle Lösungen der Gleichung $z^n = z_0 = e^{\varphi\cdot i}$ in C?

Allgemein gilt: $z_k = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i}$ mit $k \in IN$ und $1 \leq k \leq n$

Stellt man die komplexen Lösungen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar, dann sind die n Punkte die Eckpunkte eines regelmäßigen n- Ecks, das den Einheitskreis als Umkreis besitzt.

Es ist um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{\varphi}{n}$ gegenüber dem regelmäßigen n- Eck gedreht, dessen Eckpunkte die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind.