Vertiefungskurs Mathematik

Arbeitsblatt zu Primzahlen in $Z[i]$

Wie lautet die Definition für eine Primzahl in der Menge der natürlichen Zahlen?

Eine natürliche Zahl die genau zwei Teiler besitzt, nennt man Primzahl.

Die Zahl 3 ist eine Primzahl in IN. Welche Teiler hat die Zahl 3 in der Menge der ganzen Zahlen Z?

Teilermenge von 3 in Z: $T_3 = \{-3; -1; 1; 3\}$

Wie sollte man demnach die Definition für eine Primzahl in Z anpassen?

Eine ganze Zahl die genau vier Teiler besitzt, nennt man Primzahl.

Jetzt betrachten wir die Menge der ganzen komplexen Zahlen $Z[i]$.

$Z[i] = \{a + b \cdot i \mid a \in Z \text{ und } b \in Z\}$

Für die Zahl 11 gilt:

$11 \cdot 1 = 11$; $(-11) \cdot (-1) = 11$; $11i \cdot (-i) = 11$; $i \cdot (-11i) = 11$

Jede natürliche Zahl $n > 1$ hat in $Z[i]$ auf jeden Fall mindestens folgende Teiler:

$1;\ -1;\ n;\ -n;\ i;\ -i;\ n \cdot i;\ -n \cdot i$

Wie sollte man demnach die Definition für eine Primzahl in $Z[i]$ anpassen?

Eine ganze komplexe Zahl die genau acht Teiler besitzt, nennt man Primzahl.

Ist die Zahl 2 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 2 in $Z[i]$: $(1+i)\cdot(1-i) = 2$; $(-1-i)\cdot(-1+i) = 2$

$T_2 = \{-2; -1; 1; 2; i; -i; 2i; -2i; 1+i; 1-i; -1-i; -1+i\}$

12 Teiler ➔ 2 ist keine Primzahl in $Z[i]$.

Ist die Zahl 3 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 3 in $Z[i]$: $T_3 = \{-3; -1; 1; 3; i; -i; 3i; -3i\}$

8 Teiler ➔ 3 ist eine Primzahl in $Z[i]$.

Ist die Zahl 5 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 5 in $Z[i]$: $(2+i)\cdot(2-i) = 5$; $(-2-i)\cdot(-2+i) = 5$

$(1+2i)\cdot(1-2i) = 5$; $(-1-2i)\cdot(-1+2i) = 5$

$T_5 = \{-5; -1; 1; 5; i; -i; 5i; -5i; 1+2i; 1-2i; -1-2i; -1+2i$
$2+i; 2-i; -2+i; -2-i\}$

16 Teiler ➔ 5 ist keine Primzahl in $Z[i]$.

Ist die Zahl 7 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 7 in $Z[i]$: $T_7 = \{-7\,;\,-1\,;\,1\,;\,7\,;\,\mathrm{i}\,;\,-\mathrm{i}\,;\,7\mathrm{i}\,;\,-7\mathrm{i}\}$

8 Teiler ➔ 7 ist eine Primzahl in $Z[i]$.

Ist die Zahl 11 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 11 in $Z[i]$: $T_{11} = \{-11;\,-1;\,1;\,11;\,\mathrm{i};\,-\mathrm{i};\,11\mathrm{i};\,-11\mathrm{i}\}$

8 Teiler ➔ 11 ist eine Primzahl in $Z[i]$.

Ist die Zahl 13 eine Primzahl in $Z[i]$?

Bestimme alle Teiler der Zahl 13 in $Z[i]$: $(2+3\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i}) = 13$

$(-2+3\mathrm{i})\cdot(-2-3\mathrm{i}) = 13\,;\ (3+2\mathrm{i})\cdot(3-2\mathrm{i}) = 13;\ (-3+2\mathrm{i})\cdot(-3-2\mathrm{i}) = 13$

$T_{13} = \{-13\,;\,-1\,;\,1\,;\,13\,;\,\mathrm{i}\,;\,-\mathrm{i}\,;\,13\mathrm{i}\,;\,-13\mathrm{i}\,;\,2+3\mathrm{i}\,;\,2-3\mathrm{i}\,;\,-2+3\mathrm{i}\,;\,-2-3\mathrm{i}$
$3+2i\,;3-2i\,;\,-3+2i\,;\,-3-2i\}$

16 Teiler ➔ 13 ist keine Primzahl in $Z[i]$.

Was fällt dir auf?

- nicht alle Primzahlen in IN sind auch Primzahlen in $Z[i]$.

- Wenn $a + \mathrm{bi}$ ein Teiler von p ist, dann sind auch $a - \mathrm{bi}$, $-(a + \mathrm{bi})$ und $-(a - \mathrm{bi})$ Teiler von p.

- Es gilt: $1^2 + 1^2 = 2$; $1^2 + 2^2 = 5$; $2^2 + 3^2 = 13$

  Vermutung: Falls man eine Primzahl p aus IN als Summe zweier Quadrate schreiben kann, dann ist p in $Z[i]$ keine Primzahl.

Eine Primzahl p in IN ist auch genau dann eine Primzahl in $Z[i]$, falls man p als Summe zweier Quadrate schreiben kann.

Eine Primzahl $\mathrm{p} > 2$ in IN kann man genau dann als Summe zweier Quadrate schreiben, falls $\mathrm{p} = 1 \text{ MOD } 4$ gilt.