# Vertiefungskurs Mathematik 12

## Lösungen: Vermischte Aufgaben zu den komplexen Zahlen

**AUFGABE 1** a) $-2i$ b) $\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$ c) $\frac{9}{5}-\frac{3}{5}i$

**AUFGABE 2** a) $2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$ b) $4\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}=4\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}$ c) $3\cdot e^{2\pi i}$ d) $4\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i}$

e) $5\cdot e^{0,9273i}$ f) $5\cdot e^{-0,6435i}=5\cdot e^{5,6397i}$

**AUFGABE 3** a) $-2$ b) $3i$ c) $-5i$ d) $4+4i$ e) $5+5\sqrt{3}\cdot i$

**AUFGABE 4** $z_1=2e^{\frac{2}{5}\pi i}$ ; $z_2=2e^{2\cdot\frac{2}{5}\pi i}=2e^{\frac{4}{5}\pi i}$ ; $z_3=2e^{3\cdot\frac{2}{5}\pi i}=2e^{\frac{6}{5}\pi i}$

$z_4=2e^{4\cdot\frac{2}{5}\pi i}=2e^{\frac{8}{5}\pi i}$ ; $z_5=2e^{5\cdot\frac{2}{5}\pi i}=2e^{2\pi i}=2$

**AUFGABE 5**

a) $z^4=-527+336i\approx 625e^{2,5740i}$

$z_1\approx 5e^{0,6435i}$ ; $z_2\approx 5e^{\left(0,6435+\frac{1}{2}\pi\right)i}\approx 5e^{2,2143i}$ ; $z_3\approx 5e^{(0,6435+\pi)i}\approx 5e^{3,7851i}$

$z_4\approx 5e^{\left(0,6435+\frac{3}{2}\pi\right)i}\approx e^{5,3559i}$

b) $z^3=-i=e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$z_1=e^{\frac{1}{2}\pi i}$ ; $z_2=e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\pi i}=e^{\frac{7}{6}\pi i}$ ; $z_3=e^{\left(\frac{1}{2}+2\cdot\frac{2}{3}\right)\pi i}=e^{\frac{11}{6}\pi i}$

c) $z_{1;2}=\frac{3\pm 3i}{4}$

d) $z^4-2z^2+1,25=0$ Substitution $z^2=u$ liefert: $u^2-2u+1,25=0$

$u_{1;2}=\frac{2\pm i}{2}$

Resubstitution liefert: $z^2=\frac{2+i}{2}=1+\frac{1}{2}i\approx\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot e^{0,4636i}$

➔ $z_1\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{0,2318i}$ und $z_2\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{(0,2318+\pi)i}\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{3,3734i}$

Da $z_1$ eine Lösung ist, ist auch $z_3=\overline{z_1}\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{-0,2318i}\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{6,0514i}$ eine Lösung.

Da $z_2$ eine Lösung ist, ist auch $z_4=\overline{z_2}\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{-3,3734i}\approx\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{2,9098i}$ eine Lösung.

**AUFGABE 6**

a) 1.Weg: $(1-i)^2 = -2i$ ➔ $(1-i)^{17} = (1-i)\cdot(1-i)^{16} = (1-i)\cdot(-2i)^8$

➔ $(1-i)^{17} = (1-i)\cdot 256 = 256 - 256i$

2.Weg: $(1-i) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}$ ➔ $(1-i)^{17} = \left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}\right)^{17} = 256\sqrt{2}\cdot e^{17\cdot\frac{7}{4}\pi i}$

➔ $(1-i)^{17} = 256\sqrt{2}\cdot e^{\frac{119}{4}\pi i} = 256\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{4}\pi i} = 256 - 256i$

b) $(2e^{0,75\pi i})^7 = 128e^{7\cdot 0,75\pi i} = 128e^{5,25\pi i} = 128e^{1,25\pi i}$

**AUFGABE 7**

a) $z^n = (e^{0,15\pi i})^n = e^{0,15n\pi i} = 1$ ➔ $0,15n\pi = k\cdot 2\pi$ mit $k \in IN$

➔ $n = \frac{2k}{0,15} = \frac{40k}{3}$ ➔ $k = 3$ ➔ $n = 40$

b) $z^n = (e^{1,125\pi i})^n = e^{1,125n\pi i} = 1$ ➔ $1,125n\pi = k\cdot 2\pi$ mit $k \in IN$

➔ $n = \frac{2k}{1,125} = \frac{16k}{9}$ ➔ $k = 9$ ➔ $n = 16$

**AUFGABE 8**

Fall 1: Alle Nullstellen sind reell

a) eine vierfache Nullstelle: $x_1 = 0$ ; $f(x) = x^4$

b) eine dreifache Nullstelle und eine einfache Nullstelle: $x_1 = 0$ ; $x_2 = 1$

$f(x) = x^3\cdot(x-1)$

c) zwei doppelte Nullstellen: $x_1 = 0$ ; $x_2 = 1$ ; $f(x) = x^2\cdot(x-1)^2$

d) eine doppelte Nullstelle und zwei einfache Nullstellen: $x_1 = 0$ ; $x_2 = 1$ ; $x_3 = -1$

$f(x) = x^2\cdot(x^2-1)$

e) vier einfache Nullstellen: $x_1 = 1$ ; $x_2 = -1$ ; $x_3 = 2$ ; $x_4 = -2$

$f(x) = (x^2-1)\cdot(x^2-4)$

Fall 2: Es gibt mindestens ein Paar komplexer Nullstellen

a) ein Paar komplexer Nullstellen und eine doppelte reelle Nullstelle:

$x_1 = i$ ; $x_2 = -i$ ; $x_3 = 0$ ; $f(x) = x^2\cdot(x^2+1)$

b) ein Paar komplexer Nullstellen und zwei einfache reelle Nullstelle:

$x_1 = i$ ; $x_2 = -i$ ; $x_3 = 1$ ; $x_3 = -1$ ; $f(x) = (x^2-1)\cdot(x^2+1) = x^4 - 1$

c) zwei Paare komplexer Nullstellen: $x_1 = i$ ; $x_2 = -i$ ; $x_3 = 2i$ ; $x_3 = -2i$

$f(x) = (x^2+1)\cdot(x^2+4)$

d) ein Paare doppelter komplexer Nullstellen: $x_1 = i$ ; $x_2 = -i$ ; $f(x) = (x^2+1)^2$

**AUFGABE 9*** $z = a + bi$ ➔ $|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$ ; $|z+1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$

$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} < \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$

$(a-1)^2 + b^2 < (a+1)^2 + b^2$

$(a-1)^2 < (a+1)^2$

$a^2 - 2a + 1 < a^2 + 2a + 1$

$0 < 4a$ ➔ $a > 0$ d.h. $Re(z) > 0$