**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Lösungen: Vermischte Aufgaben zu den komplexen Zahlen**

**AUFGABE 1** a)$-2i$ b) $\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$ c) $\frac{9}{5}-\frac{3}{5}i$

**AUFGABE 2** a) $2\sqrt{2}∙e^{\frac{1}{4}πi}$ b) $4\sqrt{2}∙e^{-\frac{1}{4}πi}=4\sqrt{2}∙e^{\frac{7}{4}πi}$ c) $3∙e^{2πi}$ d) $4∙e^{\frac{1}{2}πi}$

# e) $5∙e^{0,9273i}$ f) $5∙e^{-0,6435i}=5∙e^{5,6397i}$

# AUFGABE 3 a) $-2$ b) $3i$ c) $-5i$ d) $4+4i$ e) $5+5\sqrt{3}∙i$

#

# AUFGABE 4 $z\_{1}=2e^{\frac{2}{5}πi}$ ; $z\_{2}=2e^{2∙\frac{2}{5}πi}=2e^{\frac{4}{5}πi}$ ; $z\_{3}=2e^{3∙\frac{2}{5}πi}=2e^{\frac{6}{5}πi}$

$z\_{4}=2e^{4∙\frac{2}{5}πi}=2e^{\frac{8}{5}πi}$ ; $z\_{5}=2e^{5∙\frac{2}{5}πi}=2e^{2πi}=2$

#

**AUFGABE 5**

a) $z^{4}=-527+336i≈625e^{2,5740i}$

$z\_{1}≈5e^{0,6435i}$ ; $z\_{2}≈5e^{\left(0,6435+\frac{1}{2}π\right)i}≈5e^{2,2143i}$ ; $z\_{3}≈5e^{\left(0,6435+π\right)i}≈5e^{3,7851i}$

$$z\_{4}≈5e^{\left(0,6435+\frac{3}{2}π\right)i}≈e^{5,3559i}$$

b) $z^{3}=-i=e^{\frac{3}{2}πi}$

$z\_{1}=e^{\frac{1}{2}πi}$ ; $z\_{2}=e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)πi}=e^{\frac{7}{6}πi}$ ; $z\_{3}=e^{\left(\frac{1}{2}+2∙\frac{2}{3}\right)πi}=e^{\frac{11}{6}πi}$

c) $z\_{1;2}=\frac{3\pm 3i}{4}$

d) $z^{4}-2z^{2}+1,25=0$ Substitution $z^{2}=u$ liefert: $u^{2}-2u+1,25=0$

 $u\_{1;2}=\frac{2\pm i}{2}$

 Resubstitution liefert: $z^{2}=\frac{2+i}{2}=1+\frac{1}{2}i≈\frac{\sqrt{5}}{2}∙e^{0,4636i}$

 🡺 $z\_{1}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{0,2318i}$ und $z\_{2}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{\left(0,2318+π\right)i}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{3,3734i}$

 Da $z\_{1}$ eine Lösung ist, ist auch $z\_{3}=\overline{z\_{1}}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{-0,2318i}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{6,0514i}$ eine Lösung.

 Da $z\_{2}$ eine Lösung ist, ist auch $z\_{4}=\overline{z\_{2}}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{-3,3734i}≈\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}∙e^{2,9098i}$ eine Lösung.

**AUFGABE 6**

 a) 1.Weg: $\left(1-i\right)^{2}=-2i$ 🡺 $\left(1-i\right)^{17}=\left(1-i\right)∙\left(1-i\right)^{16}=\left(1-i\right)∙\left(-2i\right)^{8}$

 🡺 $\left(1-i\right)^{17}=\left(1-i\right)∙256=256-256i$

 2.Weg: $\left(1-i\right)=\sqrt{2}∙e^{\frac{7}{4}πi}$ 🡺 $\left(1-i\right)^{17}=\left(\sqrt{2}∙e^{\frac{7}{4}πi}\right)^{17}=256\sqrt{2}∙e^{17∙\frac{7}{4}πi}$

 🡺 $\left(1-i\right)^{17}=$ $256\sqrt{2}∙e^{\frac{119}{4}πi}=256\sqrt{2}∙e^{\frac{7}{4}πi}=256-256i$

b) $\left(2e^{0,75πi}\right)^{7}=128e^{7∙0,75πi}=128e^{5,25πi}=128e^{1,25πi}$

**AUFGABE 7**

a)$z^{n}=\left(e^{0,15πi}\right)^{n}=e^{0,15nπi}=1$ 🡺 $0,15nπ=k∙2π$mit $k\in IN$

 🡺 $n=\frac{2k}{0,15}=\frac{40k}{3}$ 🡺 $k=3$ 🡺 $n=40$

b) $z^{n}=\left(e^{1,125πi}\right)^{n}=e^{1,125nπi}=1$ 🡺 $1,125nπ=k∙2π$mit $k\in IN$

 🡺 $n=\frac{2k}{1,125}=\frac{16k}{9}$ 🡺 $k=9$ 🡺 $n=16$

**AUFGABE 8**

Fall 1: Alle Nullstellen sind reell

a) eine vierfache Nullstelle: $x\_{1}=0$ ; $f\left(x\right)=x^{4}$

b) eine dreifache Nullstelle und eine einfache Nullstelle: $x\_{1}=0$ ; $x\_{2}=1$

 $f\left(x\right)=x^{3}∙\left(x-1\right)$

c) zwei doppelte Nullstellen: $x\_{1}=0$ ; $x\_{2}=1$ ; $f\left(x\right)=x^{2}∙\left(x-1\right)^{2}$

d) eine doppelte Nullstelle und zwei einfache Nullstellen: $x\_{1}=0$ ; $x\_{2}=1$ ; $x\_{3}=-1$

 $f\left(x\right)=x^{2}∙\left(x^{2}-1\right)$

e) vier einfache Nullstellen: $x\_{1}=1$ ; $x\_{2}=-1$ ; $x\_{3}=2$ ; $x\_{4}=-2$

 $f\left(x\right)=\left(x^{2}-1\right)∙\left(x^{2}-4\right)$

Fall 2: Es gibt mindestens ein Paar komplexer Nullstellen

a) ein Paar komplexer Nullstellen und eine doppelte reelle Nullstelle:

 $x\_{1}=i$ ; $x\_{2}=-i$ ; $x\_{3}=0$ ; $f\left(x\right)=x^{2}∙\left(x^{2}+1\right)$

b) ein Paar komplexer Nullstellen und zwei einfache reelle Nullstelle:

 $x\_{1}=i$ ; $x\_{2}=-i$ ; $x\_{3}=1$ ; $x\_{3}=-1$ ; $f\left(x\right)=\left(x^{2}-1\right)∙\left(x^{2}+1\right)=x^{4}-1$

c) zwei Paare komplexer Nullstellen: $x\_{1}=i$ ; $x\_{2}=-i$ ; $x\_{3}=2i$ ; $x\_{3}=-2i$

 $f\left(x\right)=\left(x^{2}+1\right)∙\left(x^{2}+4\right)$

d) ein Paare doppelter komplexer Nullstellen: $x\_{1}=i$ ; $x\_{2}=-i$ ; $f\left(x\right)=\left(x^{2}+1\right)^{2}$

**AUFGABE 9\*** $z=a+bi$ 🡺 $\left|z-1\right|=\sqrt{\left(a-1\right)^{2}+b^{2}}$ ; $\left|z+1\right|=\sqrt{\left(a+1\right)^{2}+b^{2}}$

$\sqrt{\left(a-1\right)^{2}+b^{2}}<\sqrt{\left(a+1\right)^{2}+b^{2}}$

$$\left(a-1\right)^{2}+b^{2}<\left(a+1\right)^{2}+b^{2}$$

$$\left(a-1\right)^{2}<\left(a+1\right)^{2}$$

$$a^{2}-2a+1<a^{2}+2a+1$$

$0<4a$ 🡺 $a>0$ d.h. $Re(z)>0$