Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Aufgaben zu Polynomgleichungen in C

AUFGABE 1

a) $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$ b) $x_1 = -3$; $x_2 = -5$ c) $x_{1;2} = \frac{11 \pm \sqrt{7}i}{4}$

AUFGABE 2

a) Probieren liefert: $x_1 = 2$

Polynomdivision liefert: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$

Aus $x^2 + 1 = 0$ folgt: $x_2 = i$; $x_3 = -i$

b) Probieren liefert: $x_1 = -1$

Polynomdivision liefert: $x^3 - x^2 + 3x + 5 = (x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 5)$

Aus $x^2 - 2x + 5 = 0$ folgt: $x_2 = 1 + 2i$; $x_3 = 1 - 2i$

c) Substitution $x^2 = u$ liefert: $u^2 - 5u - 36 = 0$

Mit Vieta folgt: $u^2 - 5u - 36 = (u - 9) \cdot (u + 4) = 0$ ➔ $u_1 = 9$; $u_2 = -4$

Resubstitution liefert: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$

AUFGABE 3

a) Polynomdivision liefert: $x^3 - 9x^2 + 27x - 28 = (x - 4) \cdot (x^2 - 5x + 7)$

Aus $x^2 - 5x + 7 = 0$ folgt: $x_{2;3} = \frac{5 \pm \sqrt{3}i}{2}$

b) Da x_1 eine Lösung ist, ist auch $x_2 = \overline{x_1} = -1{,}4 - i$ eine Lösung.

Es gilt: $\left(x - (-1{,}4 + i)\right) \cdot \left(x - (-1{,}4 - i)\right) = x^2 + 2{,}8x + 2{,}96$

Polynomdivision liefert:

$125x^3 + 300x^2 + 230x - 148 = (x^2 + 2{,}8x + 2{,}96) \cdot (125x - 50)$

Aus $125x - 50 = 0$ folgt $x_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$

AUFGABE 4

a) Polynomdivision liefert:

$2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 16x + 12 = (x - 2)^2 \cdot (2x^2 - x + 3)$

Aus $2x^2 - x + 3 = 0$ folgt: $x_{2;3} = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{4}$

b) Da x_1 eine Lösung ist, ist auch $x_2 = \overline{x_1} = 1 - i$ eine Lösung.

$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x = x \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2)$ ➔ $x_3 = 0$

Es gilt: $\big(x - (1+i)\big) \cdot \big(x - (1-i)\big) = x^2 - 2x + 2$

Polynomdivision liefert:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 - x - 1)$

Aus $x^2 - x - 1 = 0$ folgt: $x_{4;5} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

AUFGABE 5

a) Substitution $x^2 = u$ liefert: $2u^2 - 8u - 24 = 0$ ➔ $u^2 - 4u - 12 = 0$

Mit Vieta folgt: $u^2 - 4u - 12 = (u-6) \cdot (u+2) = 0$ ➔ $u_1 = 6$; $u_2 = -2$

Resubstitution liefert: $x_1 = \sqrt{6}$; $x_2 = -\sqrt{6}$; $x_3 = \sqrt{2} \cdot i$; $x_4 = -\sqrt{2} \cdot i$

$L = \left\{\sqrt{6} ;\ -\sqrt{6} ;\ \sqrt{2} \cdot i ;\ -\sqrt{2} \cdot i\right\}$

b) Substitution $x^2 = u$ liefert: $u^2 + 3u + 4 = 0$

$u_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7} i}{2}$

Resubstitution liefert: $x^2 = \frac{-3 + \sqrt{7} i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$

Ansatz: $x = a + bi$ ➔ $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ (a und b sind dabei reelle Zahlen)

Koeffizientenvergleich liefert: $a^2 - b^2 = -\frac{3}{2}$ (1) und $2ab = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (2)

Löst man (2) nach b auf, und setzt dies in (1) ein so folgt: $a^2 - \frac{7}{16a^2} = -\frac{3}{2}$ (3)

Aus (3) folgt: $16a^4 + 24a^2 - 7 = 0$ bzw. mit $a^2 = c$ ➔ $16c^2 + 24c - 7 = 0$

➔ $c_{1;2} = \frac{-24 \pm 32}{32} = \frac{-3 \pm 4}{4}$ ➔ $c_1 = \frac{1}{4}$; $c_2 = -\frac{7}{4}$

Somit folgt: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{2}$ ➔ $b_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$; $b_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

Somit erhält man die Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$; $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$

Zudem sind auch $x_3 = \overline{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$ und $x_4 = \overline{x_2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$ Lösungen.

$L = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i ;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i ;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i ;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i\right\}$

c) Substitution $x^2 = u$ liefert: $u^2 + 5u + 4 = 0$

Mit Vieta folgt: $u^2 + 5u + 4 = (u + 1) \cdot (u + 4) = 0$ ➔ $u_1 = -1$; $u_2 = -4$

Resubstitution liefert: $x_1 = i$; $x_2 = -i$; $x_3 = 2 \cdot i$; $x_4 = -2 \cdot i$

$L = \{i \; ; \; -i \; ; \; 2i \; ; \; -2i\}$