Komplexe Zahlen

Jahrgangsstufe 12

Jürgen Appel

Gliederung

1. Bildungsplan
2. Fachlicher Hintergrund
3. Unterrichtsgang
4. Fazit

Komplexe Zahlen

Baden-Württemberg

REGIERUNGSPRÄSIDIUM STUTTGART

SCHULE UND BILDUNG

Vorschlag zur inhaltlichen Schwerpunktsetzung des Vertiefungskurses Mathematik

Zentrale Themen

4. Komplexe Zahlen

- Gauß'sche Zahlenebene,
- Rechnen mit komplexen Zahlen, auch Polardarstellung
- Lösen von Gleichungen

Zahlbereichserweiterungen

- von N zu Z (Klasse 5)
- von Z zu Q (Klasse 6)
- von Q zu R (Klasse 8)
- von R zu C (Vertiefungskurs 12)

Zahlbereichserweiterungen von R zu C

- imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$
- $C = \{ z \mid z = a + b \cdot i \; ; \; a, b \in R \text{ und } i^2 = -1 \}$
- $R \subset C$
- Permanenzprinzip

Bezeichnungen und Sonderfälle

- a heißt Realteil von z ; Re(z)
- b heißt Imaginärteil von z ; Im(z)
- $b = 0 \rightarrow$ z ist eine reelle Zahl
- $a = 0 \rightarrow$ z ist eine rein imaginäre Zahl
- $z = a + b \cdot i$; $\overline{z} = a - b \cdot i$ (konjugiert komplex)

Grundrechenarten in Normalform

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i \ ; \ z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

- Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$
- Subtraktion: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$
- Division: $z_1 : z_2 = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)}$

$$z_1 : z_2 = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Zusammenhänge zwischen z und $\bar{z}$:

- $z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

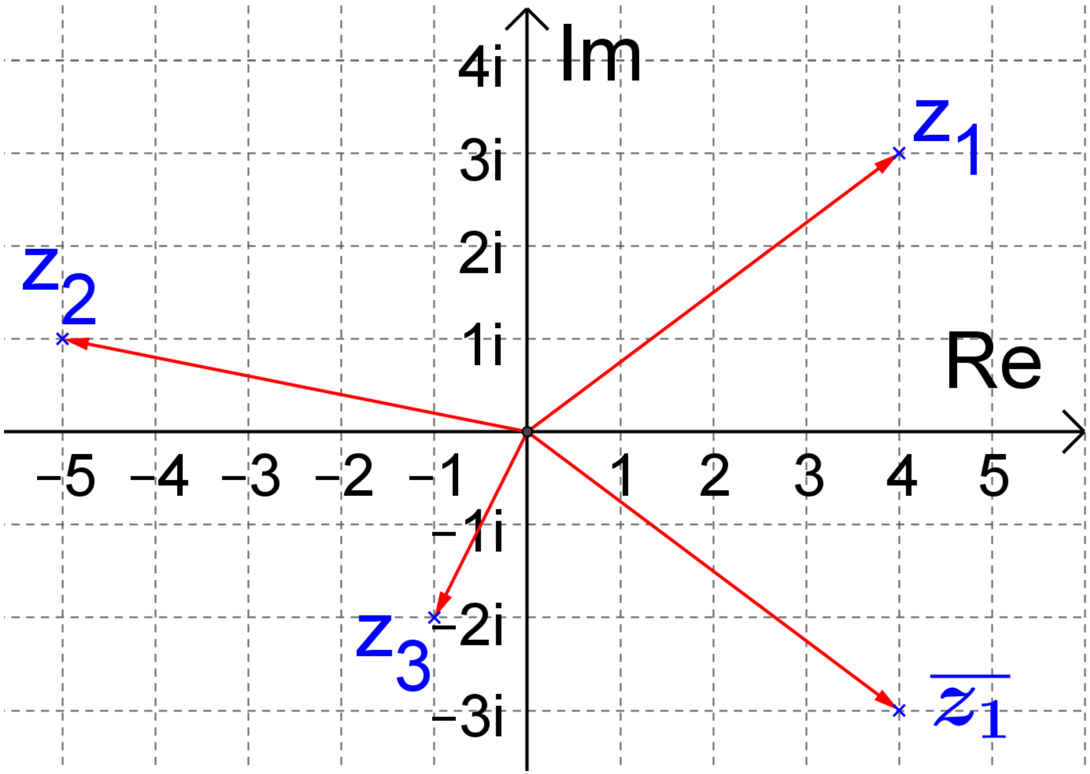
Die Gaußsche Zahlenebene

$$z_1 = 4 + 3i$$

$$\overline{z_1} = 4 - 3i$$

$$z_2 = -5 + i$$

$$z_3 = -1 - 2i$$

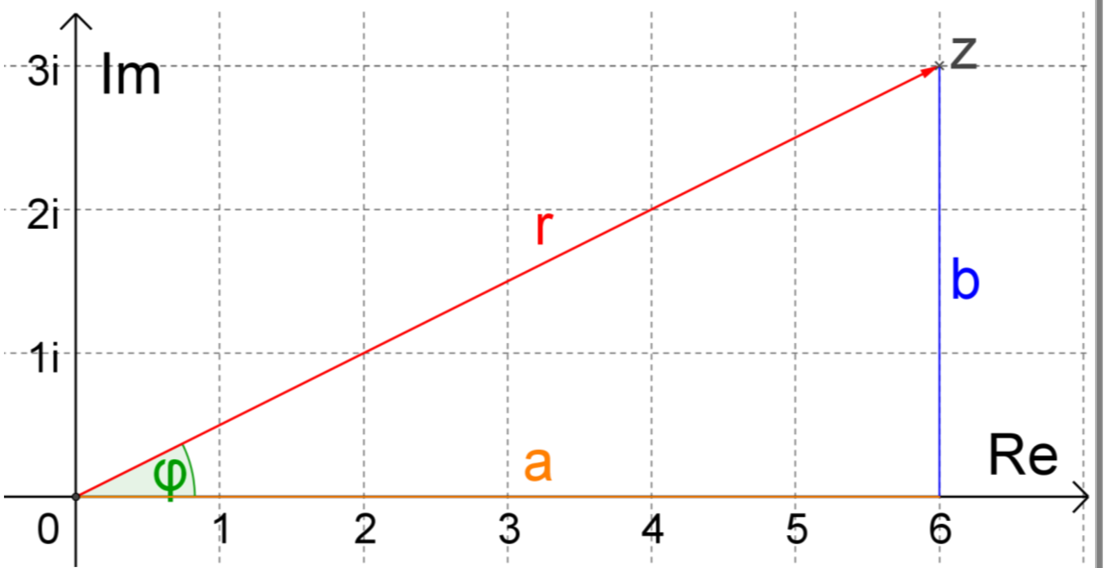


Polardarstellung grafisch

φ ist der Winkel mit der positiven Realteilachse

$$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$



Eulersche Beziehung

$$\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i = e^{\varphi \cdot i}$$

Polardarstellung (kompakte Schreibweise)

$$z = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

Sonderfall: $e^{\pi \cdot i} = -1$

Umrechnung: Normalform in Polarform

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

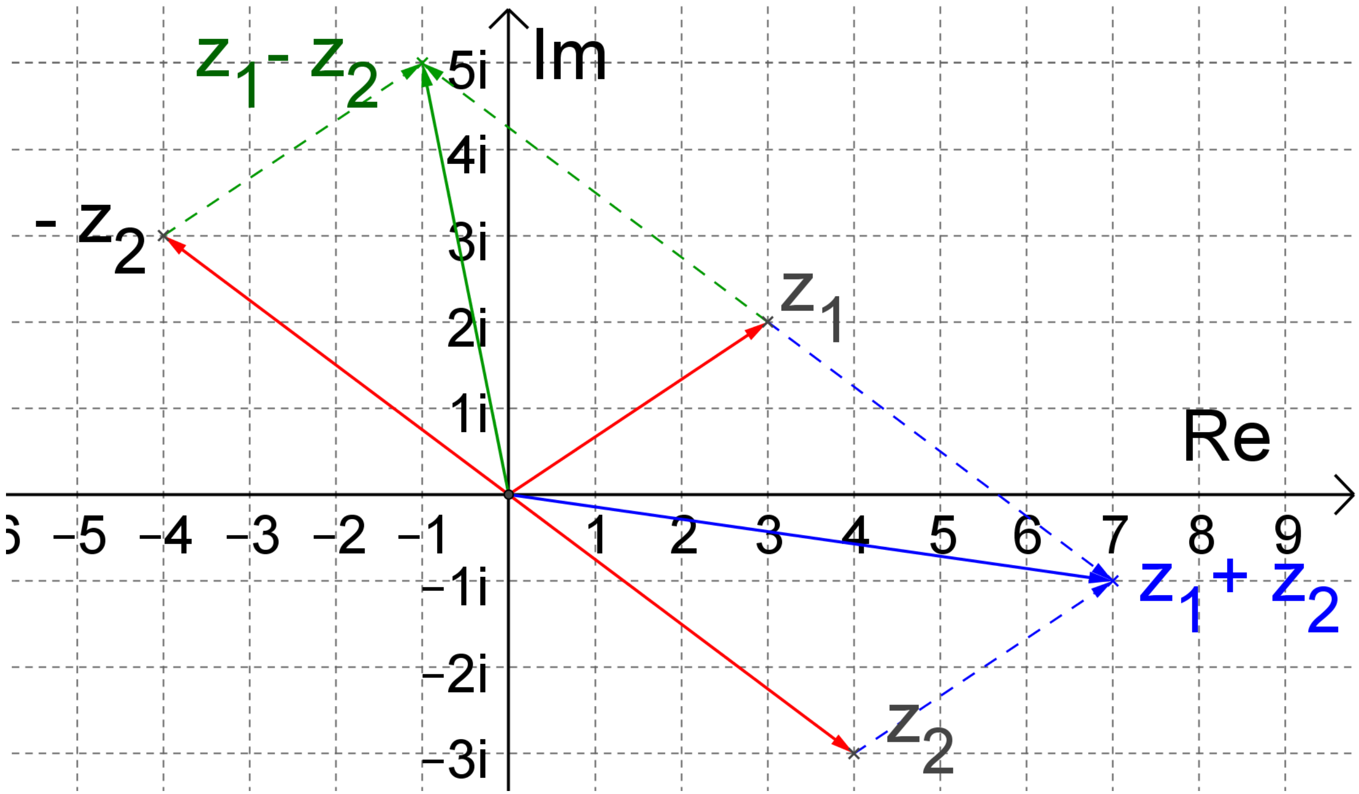
$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Umrechnung: Polarform in Normalform

$$a = r \cdot \cos(\varphi)$$

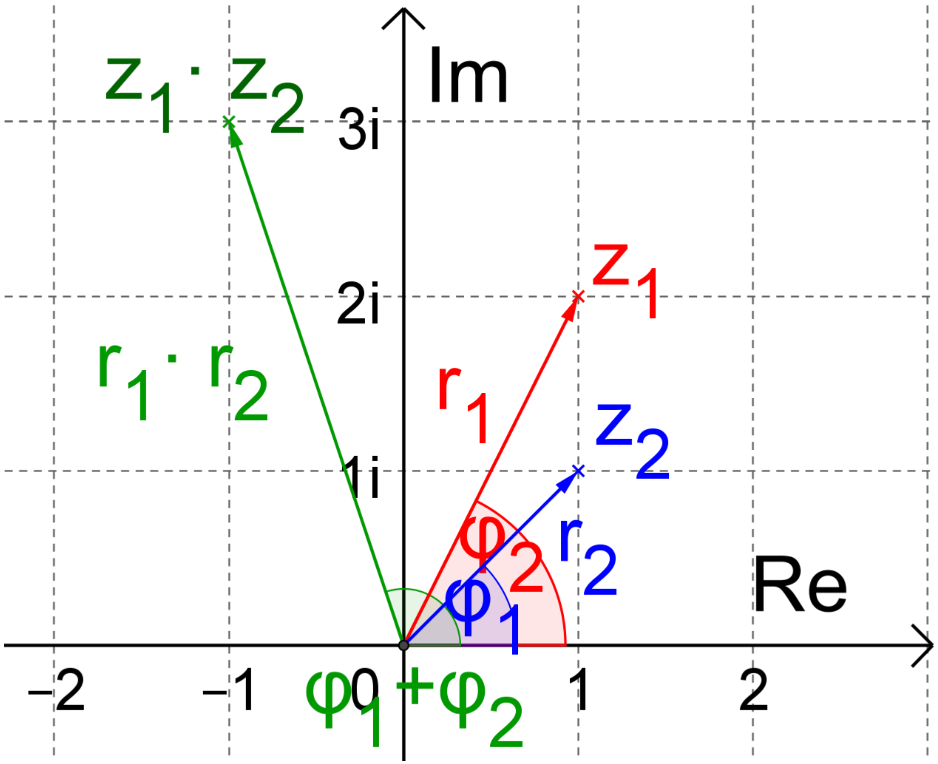
$$b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Grafische Addition und Subtraktion



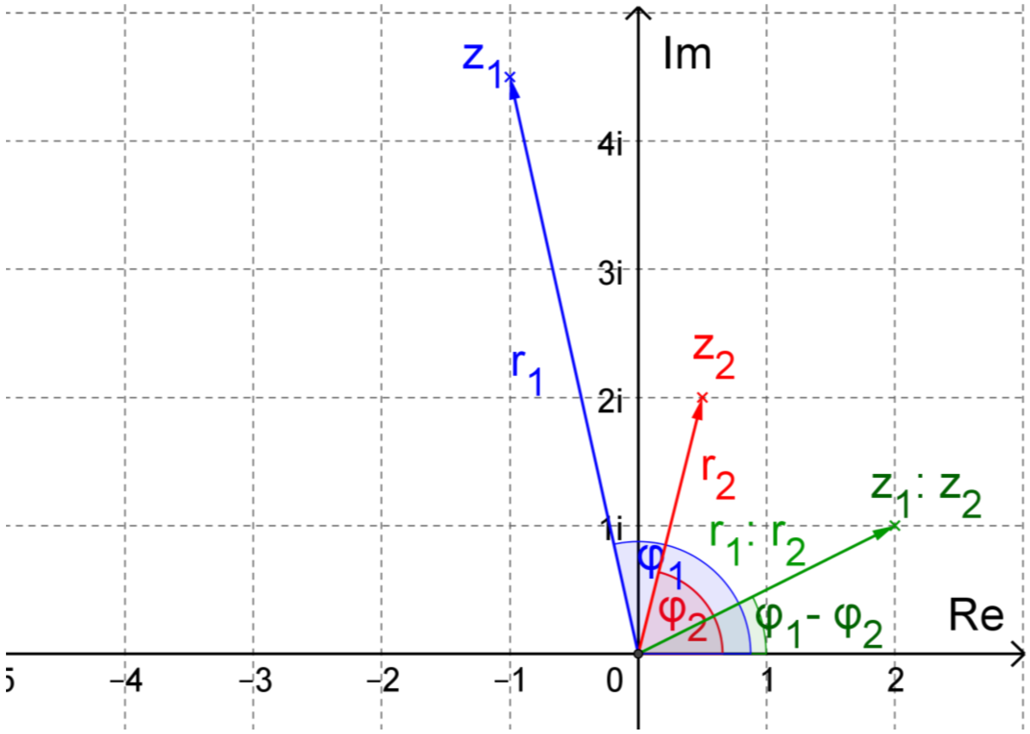
Grafische Multiplikation

Drehstreckung



Grafische Division

Drehstreckung



Vorteile beim Rechnen nutzen!

Addition und Subtraktion in Normalform

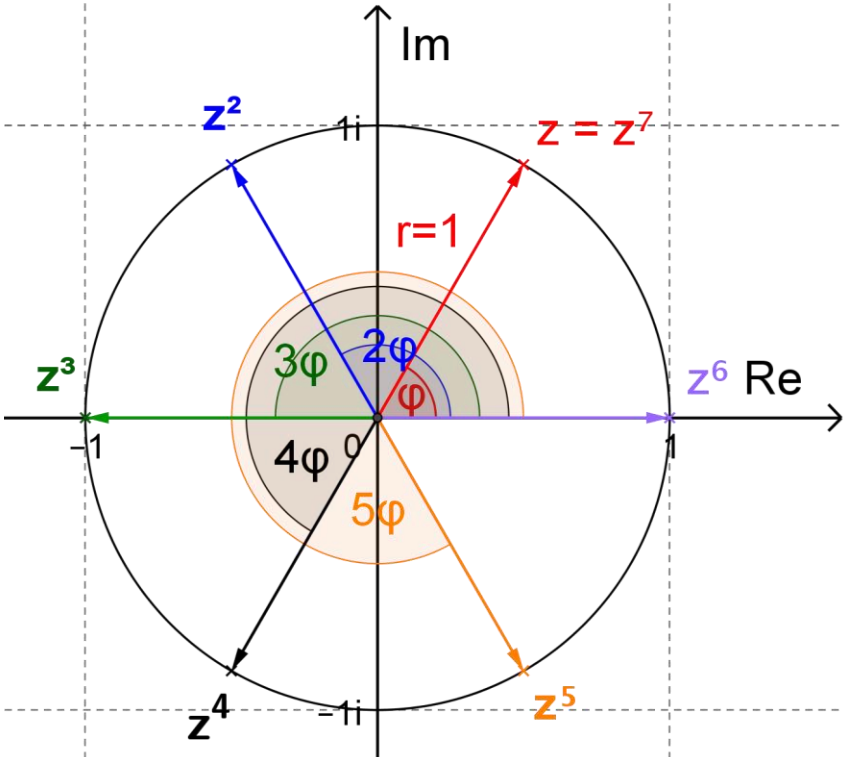
Multiplikation und Division in Polardarstellung

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{\varphi_1 \cdot i} \cdot r_2 \cdot e^{\varphi_2 \cdot i} = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i}$$

$$z_1 : z_2 = r_1 \cdot e^{\varphi_1 \cdot i} : \left(r_2 \cdot e^{\varphi_2 \cdot i}\right) = (r_1 : r_2) \cdot e^{(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i}$$

Grafisches Potenzieren am Einheitskreis

Beispiel: $z = e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}$



Potenzieren in Polarform

$$z = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

$$z^n = r^n \cdot e^{n \cdot \varphi \cdot i}$$

Sonderfall: r = 1

$$z = e^{\varphi \cdot i}$$

$$z^n = e^{n \cdot \varphi \cdot i}$$

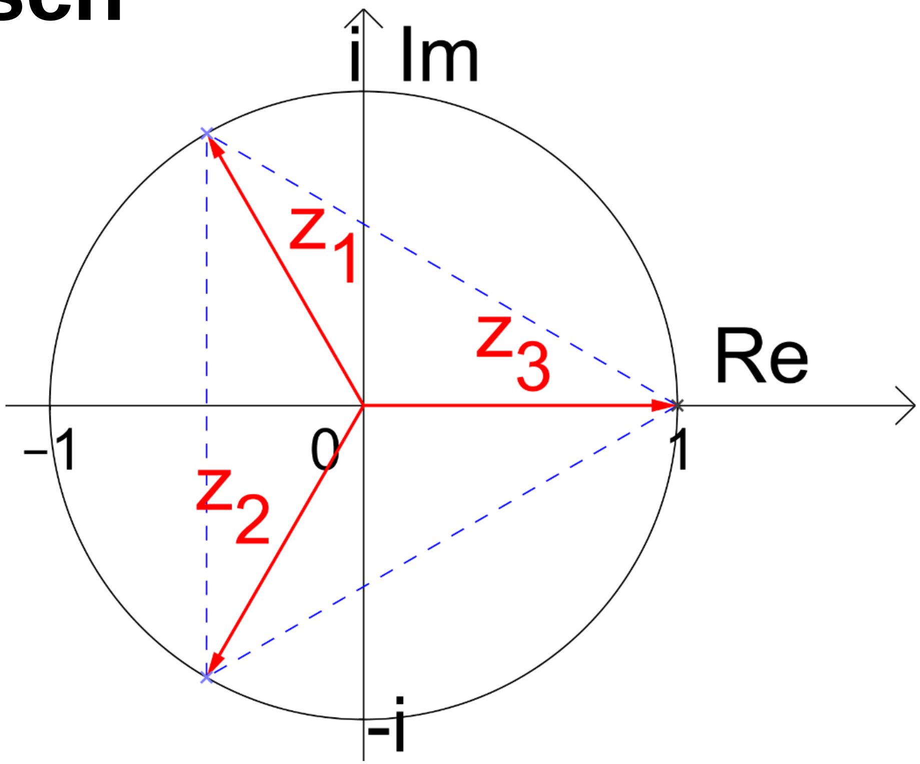
Einheitswurzel grafisch

Beispiel: $z^3 = 1$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i}$$

$$z_2 = e^{2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i} = e^{\frac{4\pi}{3} \cdot i}$$

$$z_3 = e^{3 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i} = e^{2\pi i} = 1$$



Einheitswurzel allgemein ($z^n = 1$)

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i}$$

$$z_2 = e^{2\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot i} = e^{\frac{4\pi}{n}\cdot i}$$

$$z_3 = e^{3\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot i} = e^{\frac{6\pi}{n}\cdot i}$$

$$z_k = e^{k\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot i} = e^{\frac{2k\pi}{n}\cdot i}$$

$$z_n = e^{n\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot i} = e^{2\pi\cdot i} = 1$$

$$z_k = e^{k\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot i} = e^{\frac{2k\pi}{n}\cdot i}$$

$$k \in \{1; 2; \dots; n\}$$

Grafische Lösungen der Gleichung $z^n = z_0 = e^{\varphi \cdot i}$

Beispiel: $z^5 = z_0 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i}$

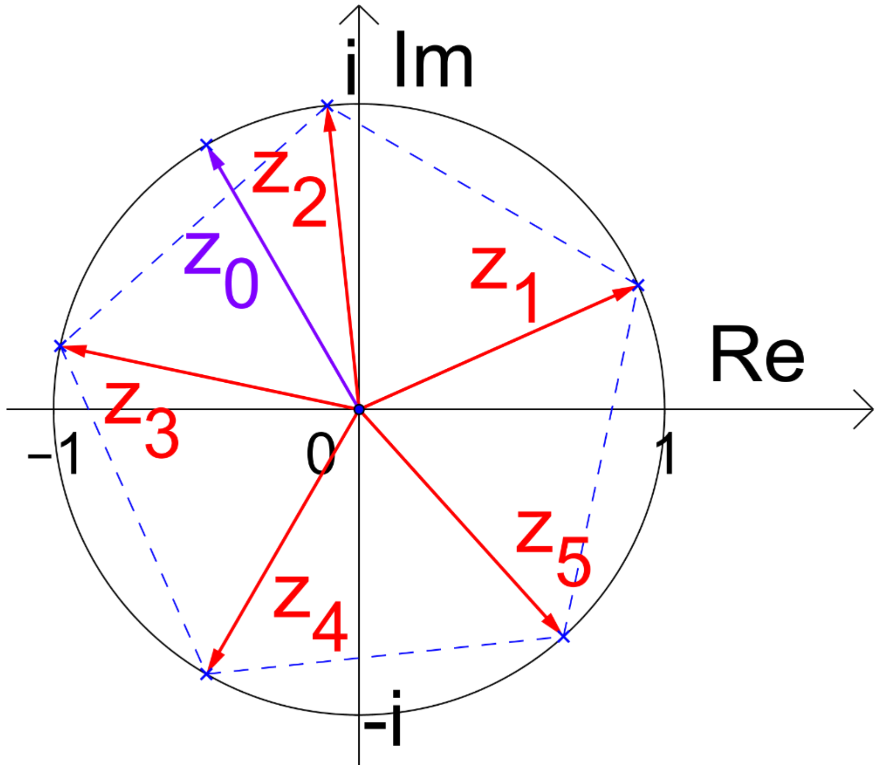
$$z_1 = e^{\frac{1}{5} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i} = e^{\frac{2\pi}{15} \cdot i}$$

$$z_2 = e^{\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}\right) \cdot i} = e^{\frac{8\pi}{15} \cdot i}$$

$$z_3 = e^{\left(\frac{2\pi}{15} + 2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \cdot i} = e^{\frac{14\pi}{15} \cdot i}$$

$$z_4 = e^{\left(\frac{2\pi}{15} + 3 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \cdot i} = e^{\frac{20\pi}{15} \cdot i}$$

$$z_5 = e^{\left(\frac{2\pi}{15} + 4 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \cdot i} = e^{\frac{26\pi}{15} \cdot i}$$



Komplexe Zahlen

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

MATHE – Vertiefungskurs Mathematik

Allgemeine Lösung von $\mathbf{z^n = z_0 = e^{\varphi \cdot i}}$

$$z_1 = e^{\frac{1}{n}\cdot\varphi\cdot i}$$

$$z_2 = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i} = e^{\frac{1}{n}\cdot(\varphi+2\pi)\cdot i}$$

$$z_3 = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i} = e^{\frac{1}{n}\cdot(\varphi+4\pi)\cdot i}$$

$$z_k = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i} = e^{\frac{1}{n}\cdot(\varphi+2\cdot(k-1)\pi)\cdot i}$$

$$z_k = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i} = e^{\frac{1}{n}\cdot(\varphi+2\cdot(n-1)\pi)\cdot i}$$

$$z_k = e^{\left(\frac{\varphi}{n}+(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cdot i}$$

$$z_k = e^{\frac{1}{n}\cdot(\varphi+2\cdot(k-1)\pi)\cdot i}$$

$$k \in \{1; 2; \ldots; n\}$$

Allgemeine Lösung von $\mathbf{z^n = z_0 = r \cdot e^{\varphi \cdot i}}$

$$z_1 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot \varphi \cdot i}$$

$$z_2 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot (\varphi + 2\pi) \cdot i}$$

$$z_3 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot (\varphi + 4\pi) \cdot i}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot (\varphi + 2 \cdot (k-1)\pi) \cdot i}$$

$$z_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot (\varphi + 2 \cdot (n-1)\pi) \cdot i}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot (\varphi + 2 \cdot (k-1)\pi) \cdot i} \qquad k \in \{1; 2; \dots; n\}$$

Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten in C

- $\mathrm{p_n(z) = 0 \Rightarrow p_n(\overline{z}) = 0}$ Beweis falls Zeit übrig!
- quadratische Gleichungen
- kubische Gleichungen (z_1 bekannt)
  Polynomdivision durch $(z - z_1) \cdot (z - \overline{z_1})$
  $(z - z_1) \cdot (z - \overline{z_1}) = z^2 - 2 \cdot Re(z_1) \cdot z + |z_1|^2$
- analog $\mathrm{p_4(z) = 0}$

Überblick über die Anzahl der Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten in C

Welche Fälle können auftreten?

- $n = 2$ (3 verschiedene Fälle)
- $n = 3$ (4 verschiedene Fälle)
- $n = 4$ (9 verschiedene Fälle)

Möglicher Unterrichtsgang

Definition; Grundrechenarten (Normdarstellung)	3 h
Zahlenebene; Grundrechenarten (grafisch)	3 h
Polarform; Euler; Umrechnungen; Potenzen	4 h
Komplexe Wurzeln	4 h
Nullstellen von Polynomen; vermischte Aufgaben	4 h

Einführung der Grundrechenarten

- **Addition und Subtraktion**

  Vergleich: Rechnen mit Vektoren

- **Multiplikation**

  Ausmultiplizieren von Klammern

- **Division**

  Vergleich: Rationalmachen des Nenners

Gaußsche Zahlenebene

- Veranschaulichung hilft den SuS
- Interpretation als Punkt und als Zeiger

  analytische Geometrie: Punkt ; Ortsvektor
- grafische Addition und Subtraktion

  analytische Geometrie: Vektoraddition
- Multiplikation

  Drehstreckung ist den SuS unbekannt

Umrechnung: Normdarstellung ↔ Polarform

- Schreibweise der Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen (arctan(x))
- WTR- Einsatz teilweise notwendig
- In welchem Quadrant liegt die Zahl?
- Wann ist eine Umrechnung sinnvoll?

Komplexe Zahlen

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

MATHE Vertiefungskurs Mathematik

Eulersche Beziehung: $\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \mathrm{i} = e^{\varphi \cdot i}$

- Sehr elegante Schreibweise
- In der Regel nur Mitteilung ohne Beweis

  Beweis möglich, falls man zuvor Taylorreihen behandelt hat
- Die e- Funktion ist plötzlich periodisch
- Sonderfall: $e^{\pi \cdot i} = -1$

Rechnen in Normdarstellung oder in Polarform?

- Addition und Subtraktion in Normdarstellung
- Multiplikation in beiden Darstellungen
- Potenzieren in Polarform (Potenzgesetze)
- Division in Polarform
- Wurzelziehen in Polarform

Nett am Rande

- Was ist i^i ? $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \approx 0{,}2079$

- Was ist $\sqrt[i]{i}$? $\sqrt[\mathrm{i}]{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}} = \mathrm{i}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}} = \mathrm{i}^{-\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}^{\mathrm{i}}} = e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4{,}8105$

Komplexe Wurzeln in drei Schritten

1) Einheitswurzeln: Lösungen von $\mathrm{z}^{\mathrm{n}} = 1$

2) Lösungen von $\mathrm{z}^{\mathrm{n}} = z_0 = e^{\varphi \cdot i}$

3) Lösungen von $\mathrm{z}^{\mathrm{n}} = \mathrm{z}_0 = \mathrm{r} \cdot \mathrm{e}^{\varphi \cdot \mathrm{i}}$

Unbedingt grafisch in Gaußschen Zahlenebene!

Beweis von $p_n(z) = 0 \Rightarrow p_n(\bar{z}) = 0$

- Vorher: Beweis von vier Hilfssätzen
  Satz 1 und Satz 2 beweisen die SuS eigenständig
  Satz 3 und Satz 4 werden im Plenum bewiesen
  (Dabei Wiederholung der vollständigen Induktion)
- Der Hauptsatz (Satz A) wird im Plenum bewiesen

Komplexe Zahlen

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Satz A
Wenn ein Polynom p_n vom Grad n mit reellen Koeffizienten in C die komplexe Nullstelle z_1 besitzt, dann ist auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms p_n .

Satz 1: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$
dann gilt: $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$.

Satz 2: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$
dann gilt: $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

Satz 3: Sei $z = a + b \cdot i$ dann gilt: $\overline{z}^{\,n} = \overline{z^n}$.

Satz 4: Sei $z_k = a_k + b_k \cdot i$ dann gilt:
$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

Überblick über die Anzahl der Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten in C

- Unterschied reelle und komplexe (nicht reelle) Nullstellen
- Mehrfache Nullstellen beachten
- Komplexe Nullstellen treten nur paarweise auf
- Es gibt auch mehrfache komplexe Nullstellen

Überblick über die Anzahl der Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten in C

- n = 2 Mitternachtsformel (Plenum)
- n = 3 Mindestens eine reelle Nullstelle (Plenum)
- n = 4 SuS in Partnerarbeit selbst machen lassen

Dabei jeweils ein konkretes Beispiel angeben!

Beispiele auch grafisch veranschaulichen (GTR)!

Zeit für Übungsphasen einplanen

- Grundrechenarten in Normdarstellung
- Umrechnung Normdarstellung $\leftrightarrow$ Polarform
- Potenzen und Wurzeln
- Nullstellen von Polynomen
- Vermischte Aufgaben

Fazit

- Wichtig für das Studium
- Thema nicht zu schwer für die SuS
- Überraschungen für die SuS
- erste „bewusste“ Zahlbereichserweiterung
- Zeit für Übungsphasen nehmen