Grenzwert einer Folge – Lösungen

1. a) g = 0: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{5}{n} - 0\right| = \frac{5}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{\varepsilon}$.

Es ist n_0 = 500 001.

b) g = 1: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{n^2-1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

(denn n > 0). Es ist $\sqrt{100\,000} \approx 316{,}23$, also n_0 = 317.

c) g = $\frac{1}{2}$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{n+2}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Es ist n_0 = 100 001.

d) g = –2: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{(-1)^n-4n}{2n} - (-2)\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n} - 2 + 2\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Es ist n_0 = 50 001.

e) g = 3: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n-1-3(n+1)}{n+1} - 2 + 2\right| = \frac{4}{n+1} < \varepsilon$

$\iff 4 > \varepsilon \cdot (n+1) \iff 4 < \varepsilon n + \varepsilon \iff 4 - \varepsilon < \varepsilon n \iff n > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Es ist n_0 = 400 000.

f) g = 1: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{7n+n^2}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{7n+n^2-n^2}{n^2}\right| = \frac{7}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{7}{\varepsilon}$.

Es ist n_0 = 700 001.

g) g = 0: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|5 \cdot \frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{5}{2^n} < \varepsilon \iff 5 < 2^n \cdot \varepsilon$

$\iff 2^n > \frac{5}{\varepsilon} \iff n > \log_2\left(\frac{5}{\varepsilon}\right)$.

Es ist n_0 = 19.

h) g = 3: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left|\frac{3^{n+1}}{3^n+1} - 3\right| = \left|\frac{3^{n+1}-3\cdot(3^n+1)}{3^n+1}\right| = \frac{3}{3^n+1} < \varepsilon$

$\iff 3 < 3^n \cdot \varepsilon + \varepsilon \iff 3^n > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \iff n > \log_3 \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$. Es ist n_0 = 12.

2. a) $\frac{n^2-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n + 1$, somit wächst a_n über jede Schranke hinaus.

b) $a_n = \begin{cases} 2\text{, falls n gerade} \\ 0\text{, falls n ungerade} \end{cases}$, somit liegen unendlich viele Glieder beliebig nahe bei 2 und unendlich viele Glieder beliebig nahe bei 0.

3. a) in Worten: Es gibt Abstände ε, für die es kein n_0 mit der Eigenschaft gibt, dass ab da alle a_n einen kleineren Abstand zu g als ε haben.

b) formal: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \ n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0\colon \ |a_n - g| \geq \varepsilon$

4. Sei ε > 0. Dann ist (für n > 3): $\left|\frac{-3+4n}{n} - 3\right| = \left|\frac{-3+4n-3n}{n}\right| = \frac{n-3}{n} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad n - 3 < n\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n - n\varepsilon < 3 \quad \Leftrightarrow \quad n(1-\varepsilon) < 3 \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{3}{1-\varepsilon}$

(falls $1 - \varepsilon > 0$). Es gibt also kein n_0, so dass $\left|\frac{-3+4n}{n} - 3\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dies gilt nur für endlich viele n.

5. a) Gegenbeispiel: $a_n = n$. Die Folge ist monoton zunehmend, aber nicht konvergent.

b) Gegenbeispiel: $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$. Die Folge ist konvergent mit Grenzwert 1, aber nicht monton.

c) Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$. Die Folge ist divergent und beschränkt.

6. von links nach rechts:

1) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = 2 - \frac{3}{n}$

2) Es gibt keine Folge mit diesen Eig.

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = (-0{,}6)^n$

4) $a_n = (-1)^n$ und $b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$

5) Es gibt keine Folge mit diesen Eig.

6) $a_n = n$ und $b_n = 3^n$

7) Es gibt keine Folge mit diesen Eig.

8) $a_n = (-1)^n \cdot n$ und $b_n = (-2)^n$

7. a) monoton zunehmend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{3n+3}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{(3n+3)(n+1)-3n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$= \frac{3n^2+3n+3n+3-3n^2-6n}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0.$

beschränkt mit s = 0 und S = 3, da $\frac{3n}{n+1} < \frac{3n}{n} = 3.$

b) monoton abnehmend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}}{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}} = \sqrt{\frac{n+2}{2n+2} \cdot \frac{2n}{n+1}} = \sqrt{\frac{2n^2+4n}{2n^2+4n+2}} < 1$, da der Nenner größer als der Zähler ist.

beschränkt mit $s = 0$ und $S = a_1 = 1$, da monoton abnehmend.